SÄCHSISCHES BILDUNGSINSTITUT

Freistaat SACHSEN

Kompetenztest

Aufgaben
Korrekturanweisungen
Hinweise zur Weiterarbeit

Klassenstufe 3

Grundschulen und Förderschulen

Schuljahr 2010/2011

Fach Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Kompetenzorientiertes Unterrichten von Mathematik

Im Folgenden werden zunächst die wesentlichen Komponenten der Bildungsstandards Mathematik kurz dargestellt. Danach werden einige allgemeine Überlegungen skizziert, wie das Fach Mathematik so unterrichtet werden kann, dass gute Chancen auf die Erreichung der durch die Standards vorgegebenen Ziele bestehen.

1. Die Bildungsstandards Mathematik

Die Bildungsstandards beschreiben mathematische Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler am Ende der vierten Jahrgangsstufe erreicht haben sollen. Dabei wird zwischen inhaltsbezogenen und allgemeinen mathematischen Kompetenzen unterschieden. Das wesentliche Ziel von Bildungsstandards ist es, die *Qualität des Unterrichts* zu steigern und dadurch die Leistungen und fachbezogenen Einstellungen aller Schülerinnen und Schüler zu verbessern. Daneben sollen die Standards eine *Orientierung* über verbindliche Zielerwartungen ebenso wie Möglichkeiten zur *Überprüfung* bieten, inwieweit diese Ziele bis zu definierten Punkten in Bildungsgängen erreicht worden sind.

Die für die Primarstufe beschriebenen inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen beziehen sich auf fünf mathematische Leitideen (die auch die entsprechenden Domänen in den Testverfahren darstellen):

- Zahlen und Operationen
- Raum und Form
- Muster und Strukturen
- Größen und Messen
- Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Diese Leitideen sollen den Schülerinnen und Schülern helfen, zentrale mathematische Konzepte und den vernetzten Charakter der Mathematik zu erkunden. Zu den Leitideen werden in unterschiedlichem Abstraktionsgrad inhaltsbezogene Kompetenzen formuliert.

Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen spielen eine herausragende Rolle bei der Entwicklung der inhaltlichen mathematischen Kompetenzen; im Einzelnen sind dies:

- Problemlösen
- Kommunizieren
- Argumentieren
- Modellieren
- Darstellen

Die mathematische Grundbildung von Schülerinnen und Schülern hängt wesentlich davon ab, in welchem Maße im Unterricht Anlässe geschaffen werden, selbst oder gemeinsam Probleme mathematisch zu lösen, über das Verstehen und das Lösen von Aufgaben zu kommunizieren, über das Zutreffen von Vermutungen oder über mathematische Zusammenhänge zu argumentieren, Sachsituationen in der Sprache der Mathematik zu modellieren und für die Bearbeitung von Problemen geeignete Darstellungen zu entwickeln oder auszuwählen.

2. Unterrichtsqualität

Aufgaben wie die im Kompetenztest enthaltenen können nicht nur zur Feststellung von Leistungsständen, sondern auch zur unterrichtlichen *Förderung* von Kompetenzen dienen. Dabei sei betont, dass nicht die Aufgaben *per se* bei den Schülern zur Ausformung, Festigung und Weiterentwicklung der zu ihrer Lösung benötigten Kompetenzen führen, sondern nur eine den Schülerfähigkeiten angepasste *Auswahl* von Aufgaben und deren adäquate *Behandlung* im Unterricht. Die Lernenden müssen – so sagen alle empirischen Untersuchungen – ausreichend viele Gelegenheiten haben, die entsprechenden kompetenzbezogenen Tätigkeiten (wie „Argumentieren“ oder „Modellieren“) *selbst* zu vollziehen, mehr noch, über diese Tätigkeiten zu reflektieren, Lösungswege zu begründen, verschiedene Wege zu vergleichen, Ergebnisse kritisch zu diskutieren u. v. a. m. Die Ergebnisse von nationalen und internationalen Leistungsvergleichen weisen darauf hin, dass im Mathematikunterricht noch bewusster und noch konsequenter als bislang die umfassende Kompetenzentwicklung der Schüler im Mittelpunkt der Arbeit stehen sollte.

In einem so verstandenen „kompetenzorientierten Unterricht“ achtet die Lehrkraft noch mehr als bisher auf die individuellen Kompetenzstände der Schüler und macht Aufgabenangebote für verschiedene Leistungsniveaus. Einige diesbezügliche Anregungen sind im folgenden Abschnitt zu finden.

3. Aufgaben, Korrekturhinweise und didaktische Kommentare

Testheftteil I: Zahlen und Operationen

Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: I-01/2011

Ordne folgende Zahlen der Größe nach. Beginne mit der kleinsten Zahl.
358, 947, 99, 1001, 385

______ < ______ <______ <______ < ______

Auswertung

RICHTIG	99 < 358 < 385 < 947 < 1001

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Zahlen und Operationen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen verstehen - sich im Zahlenraum bis 1.000.000 orientieren (z. B. Zahlen der Größe nach ordnen, runden)
Allgemeine mathematische Kompetenz	(keine Zuordnung)

Aufgabenbezogener Kommentar

Bei dieser Aufgabe werden Zahlen hinsichtlich ihrer Größe miteinander verglichen. Voraussetzung dafür sind Kenntnisse des Dezimalsystems.

Zunächst werden die Zahlen nach ihrer Ziffernanzahl geordnet. Dabei muss erkannt werden, dass die zweistellige Zahl die kleinste ist und die einzige vierstellige Zahl die größte ist. Dann werden bei den drei dreistelligen Zahlen nacheinander Hunderter, Zehner und Einer miteinander verglichen.

Der Begriff „kleinste“ bzw. das Zeichen „<“ muss bekannt sein.

Anregung für den Unterricht

Bei derartigen Aufgaben ist eine Stellentafel hilfreich.

T	H	Z	E
	3	5	8
	9	4	7
		9	9
1	0	0	1
	3	5	8

Auch die folgende Darstellungsform veranschaulicht den Zahlaufbau.

3 H + 5 Z + 8 E = 358

9 H + 4 Z + 7 E = 947

9 Z + 9 E = 99

1 T + 0 H +0 Z + 1 E = 1001

3 H + 8 Z + 5 E = 358

Weiterführend können folgende Aufgaben bearbeitet werden.

Ordne folgende Zahlen der Größe nach. Beginne mit der kleinsten /größten Zahl.

538, 358, 835, 853, 583, 385

Ordne folgende Zahlen der Größe nach. Beginne mit der kleinsten Zahl.

358, 947, 99, 1001, 385

Lösung: 1001, 947, 385, 358, 99

Warum ist diese Lösung falsch?

Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: I-02/2011

Peter und Lena haben zusammen 24 Sticker gesammelt. Lena hat doppelt so viele Sticker wie Peter.
Wie viele Sticker hat Peter? Kreuze an.

- ☐ 6 Sticker
- ☐ 8 Sticker
- ☐ 12 Sticker
- ☐ 48 Sticker

Auswertung

RICHTIG	Nur das 2. Kästchen wurde angekreuzt. (8 Sticker)

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Zahlen und Operationen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	in Kontexten rechnen - Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungs-schritten beschreiben
Allgemeine mathematische Kompetenz	Modellieren - Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen

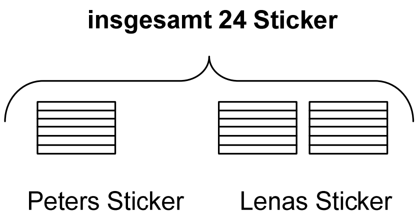
Aufgabenbezogener Kommentar

Für die Lösung ist die gegebene Sachsituation zu erfassen. Außerdem muss begriffliches Wissen flexibel angewendet werden.

Zur Lösungsfindung können unterschiedliche Strategien zum Einsatz kommen.

- Unter Einbeziehung der vorgegebenen Lösungsmöglichkeiten kann probierend gerechnet werden, indem diese mit drei multipliziert (bzw. mit zwei multipliziert und noch einmal addiert) werden. Für die Lösung „6 Sticker“ würde sich eine Gesamtzahl von lediglich 18 Stickern ergeben, bei „8 Stickern“ kommt man auf die vorgegebene Gesamtzahl von 24.
- Es kann auch über das Ausschlussverfahren mit Hilfe der Addition systematisch probiert werden.

  Z. B. Peter hat 6 Sticker, dann hat Lena 6+6=12, 6+12 ergibt nicht 24 u. s. w.
- Die gesuchte Anzahl kann auch mit Hilfe einer geeigneten Skizze ermittelt werden, die die im Text enthaltenen Informationen anschaulich darstellt:



Es wird deutlich, dass letztlich drei Stapel mit gleicher Stickeranzahl vorhanden sind, so dass durch Division der Gesamtzahl durch drei die Anzahl der Elemente eines einzelnen Stapels – also der Sticker von Peter – erhalten werden kann.

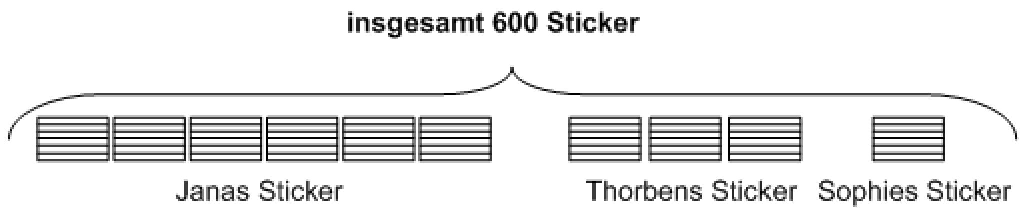
Natürlich können Kinder auch ohne Skizze diesen Rechenschritt erkennen und durchführen – insbesondere wenn im Unterricht bereits Varianten dieser Aufgabenstellung entsprechend gelöst wurden. Selbst bei größeren Zahlen und komplexeren Sachverhalten bzw. Fragestellungen kann diese Art der Skizze – ggf. grafisch noch weiter reduziert – auf alle Aufgaben dieser Art angewendet werden.

Anregung für den Unterricht

Ein Beispiel für eine im Unterricht einsetzbare Aufgabe, bei der neben der deutlich größeren Zahl (Lösen durch Probieren nicht sinnvoll möglich) und der komplexeren Situation auch die Fragestellung die Verwendung einer Skizze nahe legt:

Jana, Thorben und Sophie haben zusammen 600 Sticker.
Jana hat doppelt so viele Sticker wie Thorben. Thorben hat dreimal so viele Sticker wie Sophie.

Wie viele Sticker hat Thorben?



Zunächst werden viele Lernende in der Skizze von Hunderterstapeln ausgehen. Hier sollte der Lehrer nicht sofort eingreifen, sondern sie rechnen bzw. systematisch probieren lassen. Erst wenn die Lernenden an ihre Grenzen geraten sind, sollte der Tipp mit den 60-er Stapeln gegeben werden.

Nach der Berechnung der Stickeranzahl eines Stapels mittels Division der Gesamtzahl durch zehn ist diese noch mit drei zu multiplizieren, um Thorbens gesuchte Menge zu erhalten. Besonders der Einsatz zahlreicher Variationen dieses Aufgabentyps (z. B. veränderte Fragestellung „Wie viele Sticker hat Sophie?") fordert und fördert das genaue Lesen und Interpretieren der gegebenen Daten.

Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: I-03/2011

Zwei Freundinnen treffen sich am 1. Juli im Freibad. Eine der beiden geht alle zwei Tage, die andere alle drei Tage zum Schwimmen.
Wann treffen sich die beiden das nächste Mal im Freibad?

Sie treffen sich am ____ . Juli das nächste Mal im Freibad.

Auswertung

RICHTIG	7

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Zahlen und Operationen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	in Kontexten rechnen - Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben
Allgemeine mathematische Kompetenz	Problemlösen - Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren) Modellieren - Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen

Aufgabenbezogener Kommentar

Zur Lösung dieser Aufgabe ist es zunächst erforderlich, die Sachsituation zu verstehen, sie mathematisch zu lösen und das Ergebnis wieder auf die Sachsituation zu übertragen. Der erhöhte Schwierigkeitsgrad der Aufgabe besteht darin, dass es sich hierbei nicht um eine Grundaufgabe bzw. gängige Aufgabe handelt und somit kein Lösungsmuster zur Verfügung steht. Zahlenfolgen auf Basis des kleinen Einmaleins müssen gebildet und miteinander in Beziehung gesetzt werden. Gesucht ist das „kleinste gemeinsame Vielfache" aus $2 \cdot n + 1$ und $3 \cdot m + 1$.

Die Lösung kann durch das Aufschreiben der beiden Zahlenfolgen ermittelt werden, indem man diese vergleicht und auf die erste gemeinsame Zahl hin untersucht. Die Zahlen können beispielsweise als Folge

$\boxed{+ 2}$

1. Freundin: 1., 3., 5., **7.,** 9., 11. (Regel: immer + 2 Tage

2. Freundin: 1., 4., **7.,** 10. (Regel: immer + 3 Tage)

$\boxed{+ 3}$

oder in Tabellenform notiert werden.

	1. Freundin	2. Freundin	
	1. Juli	1. Juli	
+ 2	3. Juli		+ 3
		4. Juli	
	5. Juli		
	7. Juli	**7. Juli**	
	9. Juli		
		10. Juli	

Anregungen für den Unterricht

1. <u>Beispiele für Aufgaben in formalem Kontext mit unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden:</u>

   Zur Vorbereitung können Zahlenfolgen und im Speziellen Einmaleinsfolgen untersucht, in Beziehung gesetzt oder weiterführend das kleinste gemeinsame Vielfache gesucht werden, z. B.:

   - Schreibe die Zweierfolge und die Viererfolge auf. Markiere gemeinsame Ziffern. Fällt dir etwas auf?
   - Schreibe die Sechser- und die Achterfolge auf. Welche Ziffern haben sie gemeinsam? Markiere. Fällt dir etwas auf?
   - Schreibe die Siebener- und die Achterfolge auf. Haben sie mehrere Ziffern gemeinsam? Markiere. Fällt dir etwas auf?
   - Zwei Folgen können auf Gemeinsamkeiten hin untersucht werden, z. B.:

   1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36 (Regel: immer + 5)

   1, 7, 13, 19, 25, 31 (Regel: immer + 6)

   Nach welchen Regeln sind die beiden Zahlenfolgen gebildet? Welche Zahlen haben sie gemeinsam? Wie heißt die nächste gemeinsame Zahl?

2. <u>Beispiel für Aufgaben im Sachkontext:</u>

   Kinder haben oft kleinere Aufgaben im Haushalt, wie z. B. Tisch decken, Haustier füttern, Spülmaschine ausräumen.

   Paul füttert am Montag die Hasen. Er füttert sie jeden zweiten Tag.

   Paul deckt am Montag auch den Tisch. Er muss ihn jeden 3. Tag decken.

   - An welchen Tagen in dieser Woche füttert Paul die Hasen?
   - An welchen Tagen in dieser Woche deckt Paul den Tisch?
   - An welchem Tag hat Paul wieder beide Aufgaben - Hasen füttern und Tisch decken?

   Pauls Aufgaben können zusätzlich anhand eines Kalenders verdeutlicht werden, so dass die Schüler den Rhythmus und die Überschneidungen ablesen können.

   Die Wochentage können auch durch ein Datum ersetzt werden, z. B. den 1. Mai. Dann kann die Aufgabe noch erweitert werden durch die Frage, an welchen Tagen (Datum) Paul zum 2. bzw. 3. Mal beide Aufgaben hat.

Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: I-04/2011

Es wurden 50 Würstchen für 38 Kinder erhitzt. Jedes Kind isst ein Würstchen.
Wie viele Kinder können noch ein zweites Würstchen bekommen? Kreuze an.

☐ 6

☐ 12

☐ 22

☐ 38

Auswertung

RICHTIG	Nur das 2. Kästchen wurde angekreuzt. (12)

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Zahlen und Operationen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	in Kontexten rechnen - Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben
Allgemeine mathematische Kompetenz	Modellieren - Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen

Aufgabenbezogener Kommentar

Um die hier dargestellte Sachsituation zu lösen, ist die einfache Anwendung von Grundrechenarten nötig. Die Sachsituation muss verstanden und in die notwendige mathematische Operation überführt werden. Das Ergebnis wird anschließend überprüft und interpretiert.

Die realitätsnahe Situation erleichtert es, die Formulierung „Jedes Kind isst ein Würstchen." in die Rechenoperation „Subtraktion" (50 – 38 = 12) zu überführen, um damit die Zahl der übrigen Würstchen zu errechnen. Diese entspricht der Anzahl der Kinder, die in den Genuss eines zweiten Würstchens kommen.

Anregungen für den Unterricht

Es bietet sich der Einsatz von Varianten mit überschaubaren Zahlenwerten oder komplexerer Struktur an, bei denen dann die Anwendung der Division mit Rest nahe liegt. Dabei sollte auch die korrekte Interpretation der erhaltenen Zahlenwerte geübt werden.

Beispiele:

50 Bonbons werden gleichmäßig auf 9 Kinder verteilt. Wie viele Kinder können ein weiteres Bonbon erhalten?

50 : 9 = 5 Rest 5 Interpretation: Jedes Kind erhält zunächst 5 Bonbons, 5 Kinder können ein sechstes bekommen.

69 Kinder sollen möglichst gleichmäßig auf neun Boote verteilt werden. In wie vielen Booten müssen acht Kinder sitzen?

69 : 9 = 7 Rest 6 Interpretation: In allen neun Booten sitzen (mindestens) sieben Kinder; die sechs verbleibenden Kinder werden auf sechs Boote verteilt, in denen sich dann jeweils acht Kinder befinden.

Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: I-05/2011

Lena legt mit Ziffernkärtchen die Zahl 217.

2	1	7

Nun tauscht sie die 1 durch eine 5 aus. Wie viel größer ist die neue Zahl?

Antwort: Die neue Zahl ist um ______ größer.

Auswertung

RICHTIG	40

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Zahlen und Operationen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	Zahlendarstellungen und Zahlbeziehungen verstehen - den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen Rechenoperationen verstehen und beherrschen - die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen
Allgemeine mathematische Kompetenz	Problemlösen - mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden

Aufgabenbezogener Kommentar

Für die Bearbeitung dieser Aufgabe wird auf einfaches Grundlagenwissen über die Regeln des Stellenwertsystems zurückgegriffen. Es muss bekannt sein, dass ein Zehner der Zahl 10 entspricht. Statt eines Zehners hat Lena nun 5 Zehner und damit 4 Zehner mehr. Wichtig ist, dass hier der Zusammenhang erkannt und die Differenz gebildet wird.

Anregungen für den Unterricht

Beispiel 1:

Verändere die Ziffernkarten so, dass die neue Zahl um 200 größer / um 100 kleiner ist. Welche Ziffernkarte musst du legen?

2	1	7

Beispiel 2:

Welche dieser Ziffernkarten musst du legen, um die kleinste (bzw. größte) mögliche Zahl zu erhalten?

2		7

4 6 8

Beispiel 3:

Welche Ziffernkarte musst du legen, um die kleinste (bzw. größte) mögliche Zahl zu erhalten?

Wie groß ist der Unterschied zwischen beiden Zahlen?

4		6

Beispiel 4:

Verändere die Anordnung der Ziffernkarten so, dass du größte (bzw. kleinste) mögliche Zahl erhältst.

2	1	7

Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: I-06/2011

John und Paula haben zusammen 14 Fische gefangen. John hat 9 Fische gefangen.
Wie viele Fische hat Paula weniger gefangen als John?

Antwort: ________ Fische

Auswertung

RICHTIG	4

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Zahlen und Operationen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	in Kontexten rechnen - das Ergebnis auf Plausibilität prüfen
Allgemeine mathematische Kompetenz	Modellieren - Sachtexte und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen

Aufgabenbezogener Kommentar

Bei dieser Aufgabenstellung ist ein einfacher Zahlenraum zugrunde gelegt, der keine Schwierigkeiten beim Errechnen erwarten lässt. Voraussetzung ist, dass dem Sachtext die relevanten Informationen entnommen werden. Der Begriff „weniger als“ muss bekannt sein. Die Aufgabe gliedert sich in zwei Schritte. 1. Frage: Wie viele Fische hat Paula gefangen? 2. Wie viele Fische hat sie weniger als John?

Zu der fehlerhaften Lösung von 5 Fischen kommen Kinder, wenn sie vorschnell nur die Zahlenwerte nehmen und diese wegen des Wortes „weniger“ subtrahieren oder nur den ersten Teilschritt der Aufgabe berechnet haben.

Anregungen für den Unterricht

Bei der Behandlung von Sachaufgaben im Unterricht gilt es zunächst zu prüfen, ob die verwendeten Begriffe allen Lernenden bekannt sind. Schlüsselwörter, die in Sachaufgaben immer wieder auftauchen wie zum Beispiel „pro“, „je“, „mehr als“, „wöchentlich“, „dazutun“ können von der Aufgabe losgelöst geübt werden, um die dadurch angedeutete Rechenoperation zu erkennen. Beim Erschließen des Kontextes helfen isolierte Fragen. „Wie viele Fische haben beide zusammen?“ „Wer hat mehr Fische?“ Leistungsschwachen Lernenden hilft es, die Sachsituation anschaulich und handlungsorientiert nachzustellen oder eine Skizze anzufertigen. Für Kinder mit Deutsch als Zweitsprache ist es leichter, Sachaufgaben mündlich zu bearbeiten.

Am Schluss sollte die Lösung der Sachaufgaben auf ihre Plausibilität geprüft werden. Dies kann durch Einsetzen der errechneten Lösung in den Kontext geschehen oder gemeinsame Reflexion im Klassenverband.

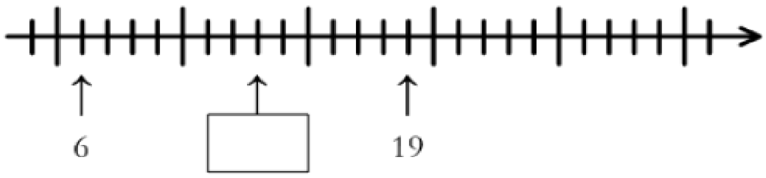
Eine Teilkompetenz kann geübt werden mit der Fragestellung „Welche Aufgabe passt zu der Rechnung 9 + 4?“ Die Lernenden wählen aus verschiedenen Möglichkeiten aus oder erfinden selbst eine passende Geschichte.

Um die mathematischen Anforderungen zu erhöhen, kann die Aufgabenstellung verändert werden.

John und Paula haben zusammen 16 Fische gefangen. Paula hat 4 Fische mehr als John. Wie viele Fische hat John gefangen?

Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: I-07/2011

Trage die fehlende Zahl ein.



Auswertung

RICHTIG	13

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Zahlen und Operationen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	Zahldarstellung und Zahlbeziehungen verstehen - Zahlen im Zahlenraum bis 1.000.000 auf verschiedene Weise darstellen und zueinander in Beziehung setzen
Allgemeine mathematische Kompetenz	(keine Zuordnung)

Aufgabenbezogener Kommentar

Der Zahlenstrahl ist eine gängige Veranschaulichung des Zahlenraums, die den Lernenden bereits ab Klasse 1 vertraut ist. Die lineare Anordnung der Zahlen hilft bei der Strukturierung des Zahlenraums. Ergänzend kann durch die Verwendung unterschiedlicher Markierungen (z. B. längere und kürzere Striche) der Aufbau des Dezimalsystems verdeutlicht und für die Bearbeitung entsprechender Fragestellungen genutzt werden.

Bei dieser Aufgabe liegt aufgrund der Verwendung eines in Einerschritten skalierten Zahlenstrahlausschnitts im Zahlenraum bis 20 eine elementare Aufgabe vor, die durch einfache Anwendung von Grundlagenwissen gelöst werden kann.

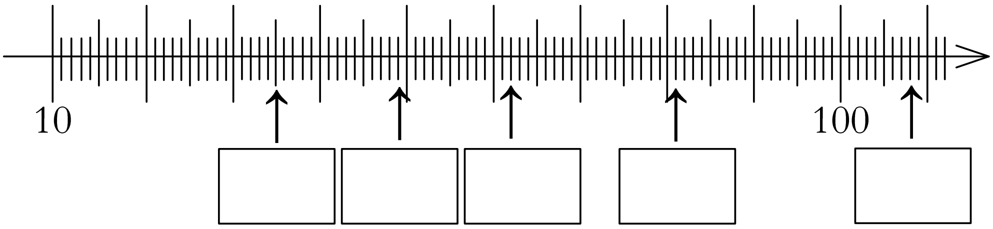
Es ist möglich, die fehlende Zahl durch Abzählen in Einerschritten (sowohl vor- als auch rückwärts) von einer gegebenen Zahl an zu ermitteln, wobei die verwendete Skalierung durch das Weiterzählen zur zweiten vorgegebenen Zahl ermittelt werden kann.

Anregung für den Unterricht

Im Unterricht bietet die Verwendung des Zahlenstrahls vielfältige Anlässe zur Kommunikation über den Aufbau des Zahlenraums, mögliche Operationen und die mathematischen Zusammenhänge. Zur Hinführung, Vertiefung und Erweiterung ist die Kombination unterschiedlicher Aufgabenstellungen unter Verwendung einer variierenden Skalierung möglich.

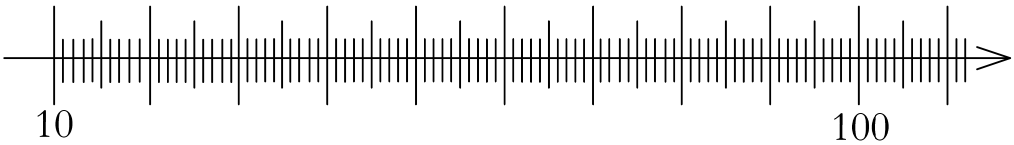
Beispiel 1

Trage die gesuchte Zahl im Kästchen ein.



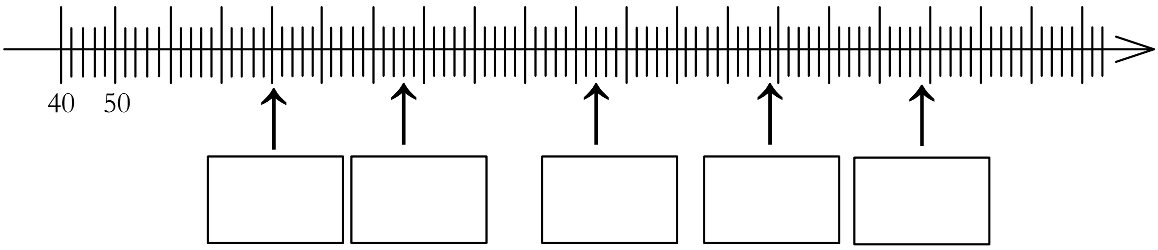
Beispiel 2

Trage ein: 25, 41, 56, 89, 104



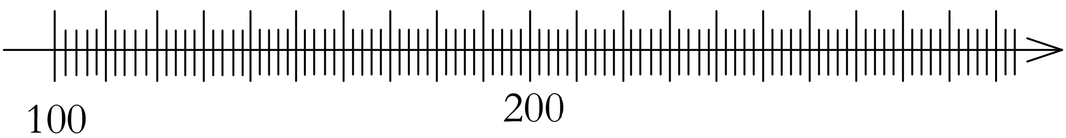
Beispiel 3

Trage die gesuchte Zahl im Kästchen ein.



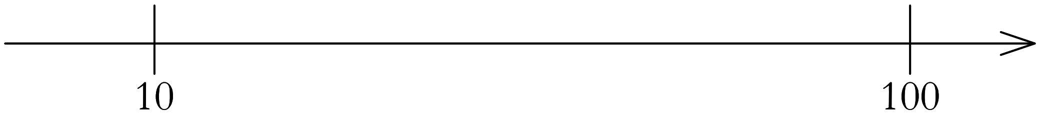
Beispiel 4

Trage ein: 90, 108, 150, 204

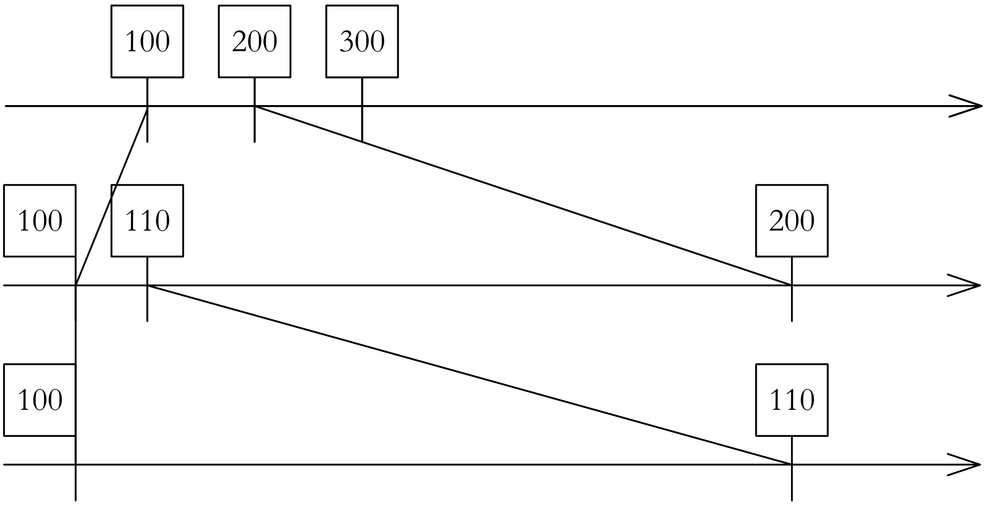


Beispiel 5

Trage ein: 50, 75, 30



Beispiel 6 „Zahlenstrahllupe“



Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: I-08/2011

Setze die passenden Rechenzeichen ein. + — • :

Auswertung

Teilaufgabe a)

RICHTIG	72 : 8 = 4 + 5

Teilaufgabe b)

RICHTIG	11 · 8 = 80 + 8

Teilaufgabe c)

RICHTIG	7 · 7 = 50 – 1

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Zahlen und Operationen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	Rechenoperationen verstehen und beherrschen - Die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen - Rechengesetze erkennen, erklären und benutzen
Allgemeine mathematische Kompetenz	(keine Zuordnung)

Aufgabenbezogener Kommentar

In dieser Aufgabenstellung sind jeweils zwei Zahlenpaare als Bruchstücke eines Terms gegeben, die durch Einsetzen von Rechenzeichen zu einer Gleichung werden. Manche Lernende scheitern an einer solchen Aufgabenstellung, weil sie die Bedeutung einer Gleichung noch nicht verstanden haben.

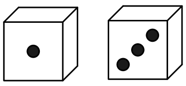
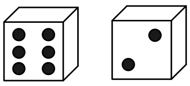
Anregungen für den Unterricht

Dem kann man schon früh - bereits im Zahlenraum bis 6 - z. B. mit einem Spiel wie „Gleich gewinnt" entgegenwirken.

> In der einfachsten Spielform würfeln immer zwei Partner. Erwürfeln sie die gleiche Augenzahl, erhalten sie einen Punkt. Das Paar aus der Klasse mit den meisten Punkten nach einer bestimmten Spielzeit oder festgelegten Anzahl an Würfen hat gewonnen.

Würfelt jeder Partner zweimal und setzt ein Rechenzeichen zwischen seinen Augenzahlen so ein, dass er ein gleiches Ergebnis erreicht wie sein Partner, werden Lösungswege zu einer solchen Aufgabenstellung vorbereitet. Anfangs wird man nur die Strichrechnung nutzen.

Beispiel:

Partner 1	Partner 2
	
1 3	6 2
1 $\boxed{+}$ 3	6 $\boxed{-}$ 2
4 =	4

Es gibt eine Fülle von Beispielen:

$1 + 1 = 6 - 4$	$1 + 2 = 6 - 3$	...	$2 + 2 = 1 + 3$	$2 + 3 = 6 - 1$
$= 5 - 3$	$= 5 - 2$		$= 2 + 2$	
$= 4 - 2$	$= 4 - 1$			
$= 3 - 1$				usw.

Den Zahlenraum vergrößert man, indem man entsprechend vorbereitete Zahlenkärtchen ziehen lässt. Nach Einführung der Multiplikation und der Division wird auch die Punktrechnung eingesetzt und damit die Anzahl der Möglichkeiten erhöht.

Einige Lernende werden bei dieser Aufgabenstellung nacheinander alle Rechenzeichen einsetzen und so durch systematisches Probieren gleiche Ergebnisse suchen oder falsche ausschließen.

$72 + 8 = 80$	$4 + 5 = 9$
$72 - 8 = 64$	$4 - 5$ *im 3. Schuljahr noch nicht behandelt*
$72 \cdot 8$ *im 3. Schuljahr noch nicht behandelt*	$4 \cdot 5 = 20$
$72 : 8 = 9$	$4 : 5$ *im 3. Schuljahr noch nicht behandelt*

Es bleibt: $72 : 8 = 4 + 5$

Mathematisch versierte Schüler schließen unpassende Rechenzeichen durch Überschlagsrechnung aus und überprüfen nur noch ihre Vermutungen.

Das inhaltliche Verständnis für Rechenoperationen und deren Zusammenhänge wird durch vielfältige Übungen, Beschreiben von Vorgehensweisen und gemeinsames Reflektieren darüber angebahnt.

Auch die Einsicht in die Zusammenhänge von Umkehraufgaben trägt zum Verständnis bei.

Ein Rückgriff auf eine handelnde oder bildhafte Ebene unterstützt den Erkenntnisprozess.

Das selbstständige Entwickeln von Aufgaben vergrößert die Einsicht in die Zusammenhänge von Zahlenpaaren und Rechenoperationen.

Zur Differenzierung kann der Schwierigkeitsgrad vermindert werden, indem nur ein Zahlenpaar und eine Lösungszahl die Aufgabe bilden. Danach können Lernende selbst die Lösungszahl durch eine passende Aufgabe ersetzen.

Z. B.

200 ____ 5 = 195	(?)
200 ____ 5 = 205	(+)
200 ____ 5 = 40	(:)
200 ____ 5 = 1000	(?)

Zur Erhöhung der Schwierigkeit werden die Kinder aufgefordert, für jede Lösung ein passendes Zahlenpaar mit Rechenzeichen zu suchen.

195 = 15 · 13 = 180 · 13 = 250 – 55 = 390 : 2	205 = 150 + 55 = 250 - 45 = 5 · 41 = 615 : 3
40 = 8 · 5 = 21 + 19 = 100 – 60 = 400 : 10	1000 = 4 · 250 = 801 + 199 = 20 · 50 = 450 + 550

Dann können beide Teile zusammengeführt werden.

200 _____ 5 = 15 ______ 13

200 _____ 5 = 180 ______ 15

200 _____ 5 = 250 ______ 55

200 _____ 5 = 390 ______ 2

Auch das Aufgabenformat mit Ankreuzverfahren bietet eine Möglichkeit, die Schwierigkeit herabzusetzen und vom systematischen Probieren zur Überschlagsrechnung heranzuführen.

Die Lernenden müssen zur Erkenntnis kommen, dass bei einem Ergebnis „kleiner als die Ausgangszahl” als Rechenzeichen nur „ – ” oder „ : ” in Frage kommen; bei einem größeren Ergebnis als die Ausgangszahl können nur „ + ” oder „ · ” eingesetzt werden.

Z. B.

96 _____ 8 = 12

☐ + 8 = 12	4 + ☐ = 12
☐ − 8 = 12	20 − ☐ = 12
☐ · 4 = 12	3 · ☐ = 12
☐ : 8 = 12	72 : ☐ = 12

Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: I-09/2011

Gregor geht einkaufen und muss an der Kasse 3,29 € bezahlen. Er bezahlt mit einem 10-Euro-Schein.
Wie viel Rückgeld bekommt er?

Antwort: ___________ €

Auswertung

RICHTIG	6,71

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Zahlen und Operationen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	in Kontexten rechnen - Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben
Allgemeine mathematische Kompetenz	Problemlösen - Mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden

Aufgabenbezogener Kommentar

Zur Lösung sind der alltagsnahen Sachsituation die relevanten Informationen zu entnehmen und in eine passende mathematische Operation zu übertragen. Das Zahlenmaterial ist einfach gewählt, so dass hier keine Schwierigkeiten beim Errechnen zu erwarten sind. Beim Anwenden des schriftlichen Verfahrens muss die Größenangabe 10 € in die Größenangabe mit Kommaschreibweise umgewandelt werden. Deshalb kann diese Aufgabe teilweise auch der Leitidee Größen und Messen zugeordnet werden.

Es sind mehrere Lösungswege denkbar:

- Zu den 3,29 € werden 6,71 € stellenweise im Kopf oder halbschriftlich ergänzt, bis 10 € erreicht sind:

  3,29 € + 0,01 € = 3,30 €

  3,30 € + 0,70 € = 4,00 €

  4,00 € + 6,00 € = 10,00 €

- Von 10,00 € werden 3,29 € durch Kopfrechnen oder halbschriftliches Rechnen stellenweise subtrahiert:

  10 € − 3 € = 7 €

  7,00 € + 0,20 € = 6,80 €

  6,80 € + 0,09 € = 6,71 €

- Durch eine schriftliche Subtraktion unter Beachtung der Schreibweise 10,00 € ist die Aufgabe ebenfalls lösbar:

	1	0 ,	0	0	€	
−		$_1$3 ,	$_1$2	9	€	
		6 ,	7	1	€	

Anregung für den Unterricht

Aufgaben dieser Art können im Unterricht durch das Nachspielen konkreter Einkaufssituationen wie z. B. Flohmarkt, Adventsbasar oder Einkaufen im Spielzeugladen mit Rechengeld vorbereitet werden.

Dabei sind folgende Aufgaben-, Fragestellungen möglich:

- Du hast 10 €. Was kannst du dir kaufen?

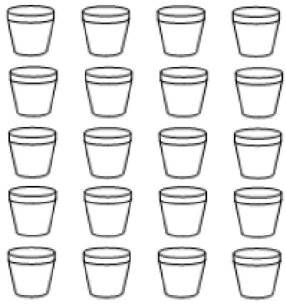
- Wie viel Rückgeld bekommst du? - Die Lösung kann rechnerisch oder handelnd durch Herausgeben von Rechengeld erarbeitet werden.

Weiterführend können folgende Aufgaben bearbeitet werden:

- Mehrere Gegenstände sollen gekauft werden. - Reicht das Geld aus?
- Eine Tüte Sammelbilder kostet 60 Cent. Mark hat 5 €.
- Wie viele Tüten kann er höchstens kaufen? Wie viel Rückgeld bekommt Mark?
- Wie viele Tüten kann er kaufen? (Verschiedene Möglichkeiten durchspielen) Wie viel Geld bekommt er jeweils zurück?
- Eine Tüte Sammelbilder kostet 60 Cent. Mark hat 5 €. Er benötigt noch 2,20 € für die U-Bahn. Wie viele Tüten kann er kaufen? Bekommt er noch Geld zurück?
- Überprüfe das Rückgeld:

Preis	gegeben	Rückgeld
5,27 €	10 €	4,73 €
8,79 €	20 €	13,31 €
23,80 €	50 €	27,20 €

Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: I-10/2011



Die Abbildung zeigt die Blumentöpfe von Mona.
Sie sät in jeden Blumentopf 3 Samen.
Welche Rechnung zeigt, wie viele Samen Mona insgesamt braucht? Kreuze an.

☐ $5 \cdot 4 \cdot 3$

☐ $5 \cdot 4 + 3$

☐ $5 + 4 \cdot 3$

☐ $5 + 4 + 3$

Auswertung

RICHTIG	Nur das 1. Kästchen wurde angekreuzt. ($5 \cdot 4 \cdot 3$)

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Zahlen und Operationen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	Rechenoperationen verstehen und beherrschen - die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen in Kontexten rechnen - Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben
Allgemeine mathematische Kompetenz	Modellieren - Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen

Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe ist nur mit Hilfe der Abbildung lösbar. Deshalb ist sie teilweise auch dem inhaltlichen Kompetenzbereich Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit zuzuordnen. Die Aufgabenstellung ist in ihrer Gesamtheit zu erfassen und in die Sprache der Mathematik zu übersetzen. Wichtig ist das Verständnis des räumlich-simultanen Aspekts der Multiplikation. Dabei sind die vorgegebenen Rechnungen in Beziehung zur Abbildung zu setzen. Die Entscheidung für die richtige Rechnung in Verknüpfung mit der Abbildung ist zu treffen.

Die vorgegebenen Terme sind zu überprüfen, indem sie auf die Ausgangssituation bezogen werden. Oder der eigene Lösungsweg wird anhand der vorgegebenen Terme überprüft. Dabei müssen eventuell eigene Lösungswege z. B. $5 \cdot 12$ übertragen werden.

Diese Aufgabe kann im Zusammenhang mit ZO-14/2011 und ZO-16/2011 gesehen werden.

Anregung für den Unterricht

Sind Sachtexten und anderen Darstellungen die relevanten Informationen zu entnehmen (Modellieren), können die Lernenden besonders bei Aufgaben ohne Abbildungen zunächst angeregt werden, die Sachinformationen durch Unterstreichen zu finden und anschließend mit eigenen Worten wiederzugeben. Erst dann lässt sich erkennen, ob sie die Aufgabenstellung erfasst haben.

Um die Kompetenz Modellieren zu fördern, erstellen die Lernenden mit Hilfe konkreter Arbeitsaufträge ähnliche Aufgaben.

Beispiel: Entwickle eine gleiche Aufgabe.

- Ändere die Anzahl der Samen in den Blumentöpfen.
- Ändere die Anzahl der Blumentöpfe.

Anschließend kann nach einem anderen Sachverhalt gesucht werden.

Beispiel: Entwickle ähnliche Aufgaben mit

- Pflanzlöchern in Reihen eines Beetes
- in Reihen gepflanzten Bäumen einer Obstwiese
- aufgestellten Slalomstäben
- Zaunfeldern um einen quadratischen oder rechtwinkligen Garten

Schließlich können unter Verwendung eigener Ideen weitere Aufgaben entstehen. Denkbar ist auch die Erweiterung des Zahlenraumes.

Bei Aufgaben dieser Art kann neben dem Modellieren auch das Kommunizieren und Argumentieren angebahnt werden. Mathematische Aussagen werden hinterfragt und auf Korrektheit geprüft. Gemeinsam wird über unterschiedliche Lösungswege reflektiert.

Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: I-11/2011

Christine hat 88 Fotos gemacht und will sie in ein Fotoalbum einkleben. Auf jede Seite passen 9 Fotos.
Wie viele Seiten braucht sie? Kreuze an.

- ☐ 8
- ☐ 9
- ☐ 10
- ☐ 11

Auswertung

RICHTIG	Nur das 3. Kästchen wurde angekreuzt. (10)

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Zahlen und Operationen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	in Kontexten rechnen - Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben
Allgemeine mathematische Kompetenz	Modellieren - Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeiten die relevanten Informationen entnehmen

Aufgabenbezogener Kommentar

Voraussetzung ist, dass dem Sachtext die relevanten Informationen entnommen werden. Die Lernenden müssen sich die Sachsituation vorstellen und arithmetisch lösen.

88 lässt sich nur mit Rest durch 9 teilen. 88 : 9 = 9 Rest 7 In der Sachsituation heißt das, Christine braucht 9 Seiten und 7 Fotos bleiben übrig. Es ist zu erkennen, dass Christine für diese 7 Fotos eine weitere Seite benötigt.

Diese Aufgabe kann auch überschlagend gelöst werden:
Hätte Christine 90 Fotos, benötigte sie 10 Seiten. Nur 2 Fotos weniger als 90 machen keine ganze Seite aus.

Anregung für den Unterricht

Bei der Behandlung von Sachaufgaben im Unterricht gilt es zunächst zu prüfen, ob die verwendeten Wörter allen Lernenden bekannt sind. Leistungsschwachen hilft es, die Sachsituation anschaulich und handlungsorientiert nachzustellen oder eine Skizze anzufertigen.

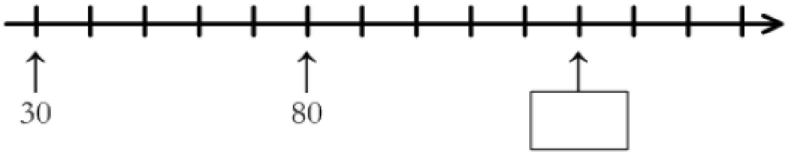
Die Fragestellung „Was passiert mit dem Rest?“ gibt Aufschluss darüber, ob die Sachsituation verstanden ist. Am Schluss sollte die Lösung der Sachaufgaben auf ihre Plausibilität geprüft werden. Dies kann durch Einsetzen der errechneten Lösung in den Kontext geschehen oder durch gemeinsame Reflexion im Klassenverband.

Beispiele zur Fragestellung „Was passiert mit dem Rest?“

- Eine Schulkasse mit 26 Kindern besucht ein Fahrgeschäft mit 4er Gondeln. Wie viele Gondeln werden besetzt?
- Oma gibt ihren 3 Enkeln eine Tüte mit 20 Bonbons. Wie viele erhält jeder?
- 5 Äpfel werden an 9 Kinder verteilt.
- Rosi bepflanzt 4 Blumenkästen. Sie hat 25 Pflanzen.

Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: I-12/2011

Trage die fehlende Zahl ein.



Auswertung

RICHTIG	130

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Zahlen und Operationen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen verstehen - Zahlen im Zahlenraum bis 1.000.000 auf verschiedene Weise darstellen und zueinander in Beziehung setzen
Allgemeine mathematische Kompetenz	(keine Zuordnung)

Aufgabenbezogener Kommentar

Der Zahlenstrahl ist eine gängige Veranschaulichung des Zahlenraums, die den Lernenden bereits ab Klasse 1 vertraut ist. Die lineare Anordnung der Zahlen hilft bei der Strukturierung des Zahlenraums. Ergänzend kann durch die Verwendung unterschiedlicher Markierungen (z. B. längere und kürzere Striche) der Aufbau des Dezimalsystems verdeutlicht und für die Bearbeitung entsprechender Fragestellungen genutzt werden.

Es ist möglich, die fehlenden Zahlen durch Abzählen in Zehnerschritten (sowohl vor- als auch rückwärts) von einer gegebenen Zahl an zu ermitteln, wobei die verwendete Skalierung durch das Weiterzählen zur zweiten vorgegebenen Zahl Bestätigung findet bzw. auf diese Weise ermittelt werden kann.

Anregung für den Unterricht

Siehe Kommentar zu ZO-07/2011

Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: I-13/2011

Setze die fehlende Zahl ein.

$$\begin{array}{r} 4\;1\;8 \\ +\,\square\square\square \\ \hline 7\;5\;3 \\ \hline\hline \end{array}$$

Auswertung

RICHTIG	335

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Zahlen und Operationen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	Rechenoperationen verstehen und beherrschen - Schriftliche Verfahren der Addition, Subtraktion und Multiplikation verstehen, geläufig ausführen und bei geeigneten Aufgaben anwenden
Allgemeine mathematische Kompetenz	Problemlösen - Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren)

Aufgabenbezogener Kommentar

In der schriftlichen Additionsaufgabe im Zahlenraum bis 1000 sind der erste Summand sowie die Summe gegeben. Der zweite Summand soll ermittelt werden.

Diese Art der Aufgabenstellung wird seltener gewählt, gibt aber Aufschluss darüber, ob das schriftliche Verfahren der Addition verstanden wurde, insbesondere wenn von der Einerstelle zur Zehnerstelle ein Zehnerübergang notwendig ist.

Bei der Einerstelle können sich die Kinder mit einer Platzhalteraufgabe helfen:

$8 + \square = 3$ geht nicht

$8 + \square = 13$ Lösung: 5

Bei der Zehnerstelle muss der gebündelte Zehner aus der Einerstelle beachtet werden und die Rechnung lautet:

$1 + 1 + \square = 5$ Lösung: 3

Bei der Hunderterstelle lautet die Platzhalteraufgabe ganz einfach:

$4 + \square = 7$ Lösung: 3

Die Lösung ist auch über die Umkehroperation denkbar:

$7 - \square = 4$ Lösung: 3

Anregung für den Unterricht

Zur Herabsetzung der Schwierigkeit kann eine Aufgabenstellung ohne Zehnerüberschreitung gewählt werden, z. B.

$$\begin{array}{r} 1\;2\;3 \\ +\;\square\,\square\,\square \\ \hline 9\;9\;9 \\ \hline\hline \end{array}$$

Soll die Schwierigkeit wieder erhöht werden, werden Aufgabenstellungen mit der Null gewählt, z. B.

$$\begin{array}{r} 2\;4\;1 \\ +\;\square\,\square\,\square \\ \hline 3\;5\;1 \\ \hline\hline \end{array} \quad \textit{oder} \quad \begin{array}{r} 2\;4\;1 \\ +\;\square\,\square\,\square \\ \hline 2\;9\;5 \\ \hline\hline \end{array} \quad \textit{oder} \quad \begin{array}{r} 2\;4\;1 \\ +\;\square\,\square\,\square \\ \hline 8\;4\;4 \\ \hline\hline \end{array}$$

Mit der Anzahl der Zehnerübergänge steigt die Schwierigkeit weiter, z. B.

$$\begin{array}{r} 3\;7\;4 \\ +\;\square\,\square\,\square \\ \hline 5\;1\;1 \\ \hline\hline \end{array}$$

Mit der gleichzeitigen Erhöhung der Anzahl der Nullen in der Summe und der Anzahl der Zehnerübergänge wird der Schwierigkeitsgrad gesteigert.

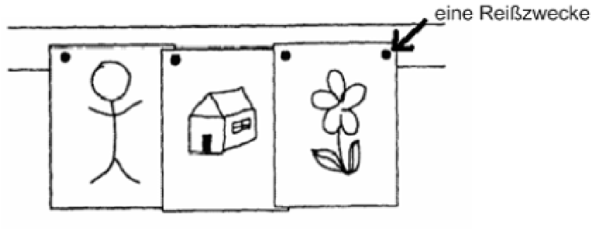
$$\begin{array}{r} 3\;1\;7 \\ +\;\square\,\square\,\square \\ \hline 4\;7\;0 \\ \hline\hline \end{array} \quad \textit{oder} \quad \begin{array}{r} 3\;1\;7 \\ +\;\square\,\square\,\square \\ \hline 5\;0\;0 \\ \hline\hline \end{array} \quad \textit{oder} \quad \begin{array}{r} 3\;0\;7 \\ +\;\square\,\square\,\square \\ \hline 5\;0\;1 \\ \hline\hline \end{array} \quad \textit{oder} \quad \begin{array}{r} 4\;9\;5 \\ +\;\square\,\square\,\square \\ \hline 1\;0\;0\;0 \\ \hline\hline \end{array}$$

Eine weitere Schwierigkeit besteht, wenn der 1. Summand errechnet werden soll, z. B.

$$\begin{array}{r} \square\,\square\,\square \\ +\;7\;8\;9 \\ \hline 9\;1\;1 \\ \hline\hline \end{array}$$

Allerdings kann man bei dreistelligen Zahlen nicht immer sicher sein, ob jedes Kind seine Einsicht in das schriftliche Additionsverfahren zeigt; manche Lernende lösen solche Aufgaben auch im Kopf.

Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: I-14/2011



Nach dem Kunstunterricht werden die Bilder der Schüler aufgehängt. Bilder, die nebeneinander hängen, teilen sich eine Reißzwecke.
Wie viele Reißzwecken braucht man, um 28 Bilder aufzuhängen? Kreuze an.

- ☐ 27
- ☐ 28
- ☐ 29
- ☐ 30
- ☐ 56

Auswertung

RICHTIG	Nur das 3. Kästchen wurde angekreuzt. (29)

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Zahlen und Operationen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	in Kontexten rechnen - Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben
Allgemeine mathematische Kompetenz	Modellieren - Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen

Aufgabenbezogener Kommentar

Die Schwierigkeit der Aufgabe besteht im Verständnis der Sachsituation. Diese muss mit Hilfe der Grafik erfasst werden. Es ist ein mathematischer Lösungsweg zu finden. Dabei gilt es herauszufinden, welche Auswirkungen es auf die Anzahl der benötigten Reißzwecken hat, wenn zwei benachbarte Bilder sich eine Reißzwecke „teilen“. Hier muss erfasst werden, dass pro Bild eine weitere Reißzwecke benötigt wird, lediglich für das erste Bild oder je nach Sichtweise für das letzte Bild braucht man 2 Reißzwecken.

Zur Lösungsfindung können unterschiedliche Strategien und Darstellungsweisen genutzt werden:

- Anfertigen einer Skizze über die gegebene Grafik hinaus – das 1. oder 28. Bild – je nach Sichtweise- wird mit einer zusätzlichen Reißzwecken befestigt.
- Mit Hilfe der Grafik kann die Aufgabe arithmetisch gelöst werden: Für jedes Bild benötigt man eine Reißzwecke, plus einer weiteren für das 1.oder 28. Bild: 28 + 1 = 29
- Die Lernenden können zudem eine Zuordnung zwischen der Anzahl der Bilder und der Anzahl der benötigten Reißzwecken vornehmen.

Beispiele für Notationsformen:

$1 \longrightarrow 2$

$2 \longrightarrow 3$

$3 \longrightarrow 4$

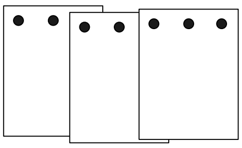
Anzahl der Bilder	Anzahl der Reißzwecken
1	2
2	3
3	4
4	5
28	29

Unter Einbeziehung der vorgegebenen Lösungsmöglichkeiten kann die Lösung 56 als falsch ausgeschlossen werden, da mit 56 Stück jedes Bild einzeln mit zwei Reißzwecken aufgehängt werden könnte, sich die Bilder also keine Reißzwecken „teilen". Es verbleiben nur noch vier Antwortmöglichkeiten.

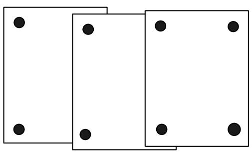
Anregung für den Unterricht

Die vorliegende Aufgabe kann für den Unterricht variiert werden, indem jedes Bild eine zusätzliche Reißzwecke erhält.

Wird die Reißzwecke am oberen Blattrand mittig befestigt, so erhält jedes Bild insgesamt 2 Reißzwecken plus 1 für das erste oder letzte Bild. Der Unterschied zur Ausgangsaufgabe kann genauer untersucht werden.



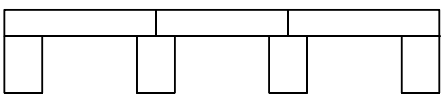
Wird die Reißzwecke unten befestigt, so erhält jedes Bild insgesamt 2 Reißzwecken plus 2 für das 1. oder letzte Bild. Der Unterschied zur Ausgangsaufgabe kann ebenfalls genauer untersucht werden.



Durch den Vergleich mit der Ausgangsaufgabe steht bei diesen beiden Variationen das Argumentieren - Zusammenhänge erkennen, Vermutungen entwickeln, Begründungen suchen und nachvollziehen - im Vordergrund.

Aufgaben die diese Thematik – ein Teil mehr oder eines weniger als auf den ersten Blick vermutet - beinhalten, lassen sich in unterschiedlichen Bereichen finden:

- Alex baut im Unterricht ein Vogelhaus. Das große Brett ist 1,80 m lang. Alex zersägt es in 6 gleichlange Holzbretter. Wie lang sind seine kleinen Bretter? Wie oft muss Alex ein Stück vom großen Brett absägen? Lösung z. B. über eine Skizze. Das Problem des Verschnitts sollte diskutiert werden.
- Mia und Jonas bauen eine große Brücke. Auf einem Pfeiler liegen immer 2 Brückenteile auf, außer am Anfang und am Ende der Brücke. Wie viele Pfeiler benötigen sie für 4 Brückenteile? Alternativ: Sie haben 6 Stützpfeiler, wie viele Brückenteile können sie verbauen?



- Familie Hegel möchte in den Sommerurlaub fahren. Sie möchten vom 1. bis 10. Juli in einem Hotel wohnen. Für wie viele Nächte müssen Sie ein Zimmer reservieren?
- Ähnliche Aufgaben sind auch im Kompetenzbereich Muster und Strukturen zu finden; vergleiche dazu MS-01/2011 und MS-06/2011.

Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: I-15/2011

Kreuze das richtige Ergebnis an.

238 + 462 =

☐ 600

☐ 690

☐ 700

☐ 790

Auswertung

RICHTIG	Nur das 3. Kästchen wurde angekreuzt. (700)

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Zahlen und Operationen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	Rechenoperationen verstehen und beherrschen - die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen - mündliche und halbschriftliche Rechenstrategien verstehen und bei geeigneten Aufgaben anwenden
Allgemeine mathematische Kompetenz	(keine Zuordnung)

Aufgabenbezogener Kommentar

Grundlage für eine Lösung über stufenweises Bündeln ist das Verständnis der Bündelungsstruktur des Dezimalsystems:

(1) Die Addition der Einer ergibt einen Zehner, es bleibt kein Einer übrig.

(2) Die Addition der Zehner einschließlich des neu produzierten Zehners ergibt einen Hunderter, es bleibt kein Zehner übrig.

(3) Zu den vorhandenen 6 Hundertern kommt ein neu produzierter Hunderter hinzu.

(4) Daher ist 700 das richtige Ergebnis.

Anregung für den Unterricht

Die Bündelung im Dezimalsystem wird schon ab Klasse 1 thematisiert und bei wachsenden Zahlenräumen wieder aufgegriffen. Ausgangspunkt sind in der Regel Handlungen in der Stellentafel.

Ein Aufgabenbeispiel in den KMK-Bildungsstandards ist zwar für die 4. Klasse konzipiert, kann aber nach Weglassen der Stellenwertspalte für Zehntausend und nach Angleichung der Aufgabenstellungen auf den Zahlenraum bis 100 als Ausgangspunkt für die Behandlung der Bündelung im Dezimalsystem gut verwendet werden (KMK: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4). 2005. München. Neuwied. S. 14)

Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: I-16/2011

Samuel hat 3 Aquarien. In jedem Aquarium befinden sich 4 Pflanzen und 5 Fische.
Wie musst du rechnen, um die Anzahl aller Fische zu bestimmen? Kreuze an.

- ☐ $3 + 5$
- ☐ $3 \cdot 4$
- ☐ $3 \cdot 5$
- ☐ $3 + 4 + 5$

Auswertung

RICHTIG	Nur das 3. Kästchen wurde angekreuzt. (3 · 5)

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Zahlen und Operationen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	Rechenoperationen verstehen und beherrschen - die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen in Kontexten rechnen - Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben
Allgemeine mathematische Kompetenz	Modellieren - Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen

Aufgabenbezogener Kommentar

Diese Aufgabe kann im Zusammenhang mit ZO-10/2011 und ZO-14/2011 gesehen werden. Hier wird das Finden des Lösungsweges allerdings nicht durch eine Abbildung unterstützt. Die Schwierigkeit besteht darin, relevante Informationen zu entnehmen, d. h. die überflüssige Angabe zu erkennen.

Die vorgegebenen Terme sind zu überprüfen, indem sie auf die Ausgangssituation bezogen werden. Oder der eigene Lösungsweg wird anhand der vorgegebenen Terme überprüft. Dabei müssen eventuell eigene Lösungswege z. B. 5 + 5 + 5 = 15 übertragen werden.

Anregung für den Unterricht

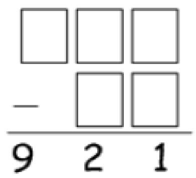
Bei Aufgaben dieser Art ohne Abbildung ist es wichtig, leistungsschwache Lernende zu einer Veranschaulichung zu führen. Dann fällt es ihnen leichter, die Aufgabe zu strukturieren und überflüssige Angaben zu erkennen.

Weiterführend eignen sich sogenannte Kapitänsaufgaben. Diese Aufgaben fokussieren Lernende auf das inhaltliche Erfassen im Zusammenhang mit der Aufgabenstellung. In diesem Kontext sollte auf das selbstständige Entwickeln von Sachaufgaben nicht verzichtet werden. (siehe ZO-10/2011)

Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: I-17/2011

Andrea hat nur die Ziffern 2, 3, 4, 6 und 9 zur Verfügung. Diese Ziffern werden auf die leeren Kästchen verteilt. Sie darf jede Ziffer nur einmal verwenden.

Andrea setzt die Ziffern so ein, dass das Ergebnis 921 beträgt.
Wie hat sie die Ziffern eingesetzt?
Schreibe in jedes Kästchen eine Ziffer.



Auswertung

RICHTIG	963 - 42

Bezug zu den Bildungsstandards:
Merkmale

Leitidee	Zahlen und Operationen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	Rechenoperationen verstehen und beherrschen - schriftliche Verfahren der Addition, Subtraktion und Multiplikation verstehen, geläufig ausführen und bei geeigneten Aufgaben anwenden in Kontexten rechnen - einfache kombinatorische Aufgaben (z. B. Knobelaufgaben) durch Probieren bzw. systematisches Vorgehen lösen
Allgemeine mathematische Kompetenz	Problemlösen - Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren)

Aufgabenbezogener Kommentar

Voraussetzung für die Lösung dieser Aufgabe:

- ein Verständnis für die Grundaufgaben der Subtraktion
- ein Verständnis für das schriftliche Verfahren der Subtraktion als Abzieh- oder Ergänzungsverfahren

Durch systematisches Probieren mit den Ziffern erkennen Lernende, dass die 9 nicht im Einer stehen kann, weil keine 8 vorhanden ist. Sie kann auch nicht im Zehner stehen, weil keine 7 zur Verfügung steht.

Anregung für den Unterricht

Durch folgende Beispiele lassen sich u. a. die Fertigkeiten beim Lösen dieser schriftlichen Subtraktionsaufgaben weiter schulen.

1. Bildung von schriftlichen Subtraktionsaufgaben, in denen jeweils nur eine Ziffer im Minuenden oder Subtrahenden fehlt □ durch gezieltes Fragen erhalten Lernende die richtige Lösung.

Du hast die 5,8,6 zur Verfügung. Welche Ziffer kannst du nur an die fehlende Zehnerstelle setzen? Warum genau diese und keine andere? Begründe.

$$\begin{array}{rccc} & 9 & \_ & 3 \\ - & & 4 & 2 \\ \hline & 9 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

2. Schriftliche Subtraktionsaufgaben mit fehlenden Ziffern in einem kleineren Zahlenraum mit und ohne der Vorgabe von Auswahlziffern

3. Schriftliche Subtraktionsaufgaben in denen entweder der Minuend oder er Subtrahend fehlt und die Differenz vorhanden ist

4. Entdeckeraufgaben z. B.

Wie heißt die nächste Aufgabe? Wie hast du sie gebildet? Was stellst du in der Differenz fest? Warum ist das so?

$$\begin{array}{rccc} & 9 & 8 & 7 \\ - & \boxed{7} & \boxed{8} & \boxed{9} \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} & 8 & 7 & 6 \\ - & \boxed{6} & \boxed{7} & \boxed{8} \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} & 7 & 6 & 5 \\ - & \boxed{5} & \boxed{6} & \boxed{7} \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} & ? & ? & ? \\ - & \boxed{?} & \boxed{?} & \boxed{?} \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$$

Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: I-18/2011

Hans hat 8 Birnen. Er hat viermal so viele Birnen wie Peter.
Wie viele Birnen hat Peter? Kreuze an.

☐ 2 Birnen

☐ 4 Birnen

☐ 16 Birnen

☐ 32 Birnen

Auswertung

RICHTIG	Nur das 1. Kästchen wurde angekreuzt. (2 Birnen)

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Zahlen und Operationen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	in Kontexten rechnen - Sachaufgaben lösen und dabei die Beziehungen zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben - das Ergebnis auf Plausibilität prüfen
Allgemeine mathematische Kompetenz	Modellieren - Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen

Aufgabenbezogener Kommentar

Voraussetzung die hier dargestellte Sachsituation zu lösen, ist das Beherrschen der Grundaufgaben des Einmaleins sowie die Kenntnis über einfaches begriffliches Wissen zur Interpretation der Formulierung „... hat viermal so viele Birnen wie ...“ verfügen (inverse Aufgabe, es muss trotz der Formulierung „…viermal…“ dividiert werden). Die Sachsituation muss verstanden, in die notwendige mathematische Operation überführt und das Ergebnis anschließend korrekt interpretiert werden.

Die richtige Lösung kann mittels unterschiedlicher Rechenstrategien erfolgen:

- Unter Einbeziehung der vorgegebenen Lösungsmöglichkeiten kann probierend gerechnet werden, indem diese mit vier multipliziert werden. Damit folgt man direkt dem Wortlaut der Aufgabe „... hat viermal so viele Birnen wie ...“.
- Unabhängig von den gegebenen Lösungsmöglichkeiten kann die gesuchte Anzahl durch Umkehrung der im Text implizit angegebenen Rechenart „Multiplikation“ erhalten werden, indem man Hans´ 8 Birnen durch vier dividiert. Ein möglicher Fehler kann durch vorschnelles Rechnen „$4 \cdot 8 = 32$“ entstehen, wenn die inverse Aufgabenstellung nicht als solche erkannt wurde.

Anregung für den Unterricht

Variantenreicher Einsatz solcher Aufgaben im Unterricht unterstützt die Herausbildung bzw. Festigung der Fähigkeit zum sicheren Verständnis mathematischer Begrifflichkeiten in Sachzusammenhängen.

Beispiele für ähnliche Aufgaben mit unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden:

- Tim hat doppelt so viele Äpfel wie Sarah. Tim hat 18 Äpfel. Wie viele hat Sarah?
- Luca hat halb so viele Murmeln wie Fred. Luca hat 4 Murmeln. Wie viele hat Fred?
- Luca hat halb so viele Murmeln wie Fred. Fred hat 16 Murmeln. Wie viele hat Luca?
- Elena hat 16 Stifte. Marius hat ein Viertel weniger Stifte als Elena. Wie viele hat Marius?
- Marius hat 12 Stifte. Er hat ein Viertel weniger Stifte als Elena. Wie viele hat Elena?

Insbesondere die letzte Aufgabe stellt für Lernende der 3. Jahrgangsstufe eine besondere Herausforderung im Hinblick auf die Modellierung der Sachsituation dar, da sich Fehlinterpretationen geradezu anbieten.

Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: I-19/2011

Eine Zahl wird mit 5 multipliziert.
Wie könnte das Ergebnis lauten? Kreuze an.

- ☐ 652
- ☐ 562
- ☐ 526
- ☐ 265

Auswertung

RICHTIG	Nur das 4. Kästchen wurde angekreuzt. (265)

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Zahlen und Operationen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	Rechenoperationen verstehen und beherrschen - die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen - die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen - mündliche und halbschriftliche Rechenstrategien verstehen und bei geeigneten Aufgaben anwenden - verschiedene Rechenwege vergleichen und bewerten; Rechenfehler finden, erklären und korrigieren - Rechengesetze erkennen, erklären und benutzen
Allgemeine mathematische Kompetenz	Problemlösen - Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen

Aufgabenbezogener Kommentar

Für die richtige Lösung der Aufgabe reicht ein einfaches Anwenden von Wissen aus dem kleinen Einmaleins aus. Entsprechend der Teilbarkeitsregel: „Eine Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer durch 5 teilbar ist (0 oder 5)“ gilt umgekehrt: „Eine Zahl wurde dann mit 5 multipliziert, wenn ihre letzte Ziffer eine 0 oder 5 ist.“ Somit kommt von den vier vorgestellten Zahlen nur die Zahl 265 als mögliche Lösung einer Multiplikation mit 5 in Betracht.

Anregung für den Unterricht

Bevor Regeln erkannt werden, die im Zusammenhang mit Zifferndarstellungen stehen, sind die Begriffe „Zahl“ und „Ziffer“ zu klären und ihre richtige Verwendung in konkreten Aufgabenstellungen zu sichern.

Regeln der Einmaleinsfolgen lassen sich gut über Zahlenmuster in der Hundertertafel entdecken:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Alle Zahlen der Zweierfolge enden auf eine gerade Ziffer (0, 2, 4, 6 oder 8).
Eine Zahl ist genau dann durch 2 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer gerade ist (0, 2, 4, 6 oder 8).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Alle Zahlen der Fünferfolge enden auf 0 oder 5.

Eine Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer auf 0 oder 5 endet.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Alle Zahlen der Zehnerfolge enden auf 0.

Eine Zahl ist genau dann durch 10 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine 0 ist.

Eine Fortführung über die ersten 10 Einmaleinszahlen zeigt, dass sich die Regel fortsetzt.

Das Wissen um solche Regeln wird dauerhaft gefestigt, wenn entsprechende problemhaltige Aufgabenstellungen immer wieder für eine Aktivierung sorgen. Hierzu eignen sich besonders Plausibilitätsprüfungen von Lösungen durch überschlagendes Rechnen und offene Problemstellungen, bei denen „unscharf“ mit Schätzungen gearbeitet wird (Fermi- Aufgaben) oder bei denen die Lösung nicht zu 100% präzise sein muss.

Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: I-20/2011

Eine der folgenden Zahlen soll von 900 abgezogen werden. Das Ergebnis soll größer als 400 sein.

Welche Zahl muss abgezogen werden? Kreuze an.

- ☐ 712
- ☐ 667
- ☐ 579
- ☐ 459

Auswertung

RICHTIG	Nur das 4. Kästchen wurde angekreuzt. (459)

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Zahlen und Operationen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	Rechenoperationen verstehen und beherrschen - die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen - die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen - mündliche und halbschriftliche Rechenstrategien verstehen und bei geeigneten Aufgaben anwenden
Allgemeine mathematische Kompetenz	Problemlösen - Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren)

Aufgabenbezogener Kommentar

Formal, aber nicht grundschulgerecht, könnte formuliert werden:

$$900 - x > 400 \longrightarrow 900 - 400 > x \longrightarrow 500 > x$$

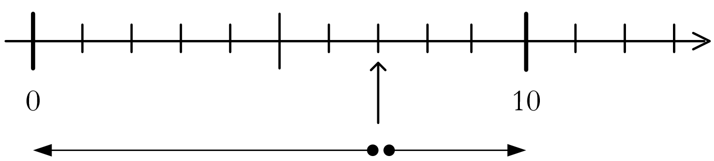
Bei der vorliegenden Aufgabe gelangt man aber am einfachsten durch eine Plausibilitätsüberlegung zum Ergebnis:

„Wenn das Ergebnis größer als 400 sein soll, muss der Subtrahend kleiner als 500 sein. Dies trifft nur für die Zahl 459 zu.“

Anregung für den Unterricht

Voraussetzung für überschlägiges Rechnen sind gesicherte Kenntnisse zum Runden von Zahlen.

Runden setzt Verständnis für und Orientierung im Zahlenraum voraus. Hilfreich ist für das Suchen des nächstkleineren bzw. nächstgrößeren Zehners, Hunderters, … besonders der Zahlenstrahl, da die Entfernung zur nächsten Stufenzahl gut deutlich wird.



Überschlagsrechnungen wurden in der Vergangenheit häufig zur Überprüfung von schriftlichen Rechnungen eingesetzt.

Überschlag:

$$\begin{array}{r} 147 \\ +\,278 \\ \hline 425 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100 \\ +\,300 \\ \hline 400 \\ \hline \end{array}$$

Mache erst einen Überschlag und dann rechne:

Ü: 100 + 300 = 400

$$\begin{array}{r} 147 \\ +\,278 \\ \hline 425 \\ \hline \end{array}$$

Nachdem der Taschenrechner längst auch Zugang in die Grundschule gefunden hat, erfolgt die Kontrolle von Ergebnissen häufig elektronisch. Die Bedeutung des überschlägigen Rechnens hat für diesen Bereich daher abgenommen.

In Alltagssituationen ist überschlägiges Rechnen dagegen nach wie vor eine wesentliche Hilfe.

Beispiel: Im Einkaufskorb liegen:

2 Stifte	zu je 0,98 €
1 Zeichenblock	zu 1,99 €
1 Anspitzer	zu 1,59 €
2 Packungen Tintenpatronen	zu 0,99 €

Tim hat 10 €. Kann er noch eine Tube Papierkleber für 1,49 € kaufen?

Aber auch mathematische Fragestellungen benötigen Schätzen, Runden und Überschlagen als wichtige Lösungshilfen.

Testheftteil II: Muster und Strukturen

Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: II-01/2011

Niki legt mit Holzstäbchen ein Muster und schreibt die passenden Aufgaben darunter.

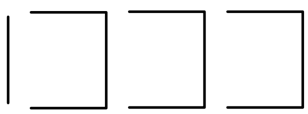
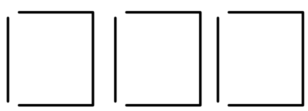
1. 2. 3. 4. 5.

$1 \cdot 3 + 1 = 4$ $2 \cdot 3 + 1 = 7$ $3 \cdot 3 + 1 = 10$ ____________ ____________

Auswertung

Teilaufgabe a)

Zeichne die 3. Figur.

RICHTIG	3. Figur wurde korrekt eingezeichnet (vgl. Lösungsbeispiel). Skizzenhafte Darstellung ist auch als richtig zu werten, wenn das Muster zu erkennen ist. 
FALSCH	3. Figur wurde falsch eingezeichnet (vgl. Lösungsbeispiel). 

Teilaufgabe b)

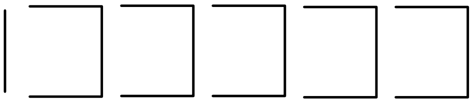
Schreibe die 4. Aufgabe auf.

RICHTIG	$4 \cdot 3 + 1 = 13$

Teilaufgabe c)

Zeichne die 5. Figur.

Schreibe die 5. Aufgabe darunter.

RICHTIG	5. Figur wurde korrekt eingezeichnet (vgl. Lösungsbeispiel). Skizzenhafte Darstellung ist auch als richtig zu werten, wenn das Muster zu erkennen ist.  UND Rechnung korrekt angegeben: $5 \cdot 3 + 1 = 16$

Teilaufgabe d)

Für jede weitere Figur legt Niki immer ______________ Hölzchen dazu.

RICHTIG	• 3 • drei • Alle Umschreibungen, die die Zahl 3 beinhalten: z. B. zwei Hölzchen quer/waagerecht und eins längs/senkrecht kommen immer dazu/werden angelegt.

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Muster und Strukturen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen - Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen - arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben
Allgemeine mathematische Kompetenz	Problemlösen Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen

Aufgabenbezogener Kommentar

Das Bildungsgesetz einer geometrischen und einer analogen arithmetischen Folge muss erkannt werden.

Bei Aufgabe 1a besteht die Anforderung darin, die geometrische Folge um das nächste Glied zeichnerisch fortzusetzen.

Bei Aufgabe 1b besteht die Anforderung darin, die nächste Gleichung in der Folge zu finden und aufzuschreiben. Dabei kann das Bildungsgesetz aus den vorangehenden Gleichungen abgeleitet oder zur Unterstützung auch die darüber befindliche geometrische Struktur herangezogen werden.

Bei Aufgabe 1c muss sowohl die geometrische Folge um die nächste Figur zeichnerisch fortgesetzt als auch die nächste Gleichung in der Folge aufgeschrieben werden.

In Aufgabe 1d besteht die Anforderung darin, das Bildungsgesetz der geometrischen Folge mit Hilfe einer im Wesentlichen vorgegebenen Teilformulierung zu erfassen und zu beschreiben.

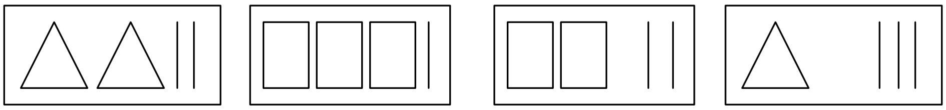
Anregung für den Unterricht

Vor dem Fortsetzen oder Ergänzen von Mustern dieser Art sollte der Zusammenhang zwischen Bild und zugehöriger Gleichung geklärt werden. Dazu wäre es möglich, verschiedene Gleichungen vorzugeben. Die Lernenden finden heraus, welche Gleichung zu welcher bildhaften Darstellung passt und begründen dies.

Beispiel:

Welche Aufgabe passt zu welchem Bild. Ordne zu.

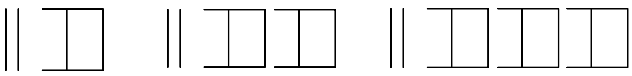
$3 \cdot 4 + 1$	$2 \cdot 3 + 2$	$1 \cdot 3 + 3$	$2 \cdot 4 + 2$



Die Muster können mit Hölzchen nachgelegt werden, um die Aufgaben zu finden bzw. zu erklären.

Ein Beispiel für eine ähnliche geometrische Folge wie MS-01/2011 kann sein:

1. 2. 3. 4.



$2 + 1 \cdot 4 = 6$	$2 + 2 \cdot 4 = 10$	$2 + 3 \cdot 4 = 14$

- Die Lernenden legen zuerst mit Hölzchen die vierte (und fünfte) Figur.
- Sie beschreiben das Bildungsgesetz der geometrischen Folge.
- Sie finden die Gleichung für die vierte Gleichung.
- Sie beschreiben den Zusammenhang von geometrischen Figuren und Gleichungen.

Schließlich können sie dazu animiert werden, selbst ähnliche geometrische Folgen zu erfinden und sie darzustellen. Diese legen sie sich gegenseitig vor, beschreiben dann das Bildungsgesetz und finden die Gleichungen dazu.

Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: II-02/2011

Hier siehst du eine Zahlenfolge.

3, 6, 5, 8, 7, 10, 9, ?

Welche Zahl kommt als nächstes? Kreuze an.

☐ 13

☐ 11

☐ 10

☐ 12

Auswertung

RICHTIG	Nur das 4. Kästchen wurde angekreuzt. (12)

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Muster und Strukturen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen - Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen
Allgemeine mathematische Kompetenz	Problemlösen - Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen

Aufgabenbezogener Kommentar

Um die gefragte Zahl finden zu können, ist das Bildungsgesetz der Zahlenfolge zu erfassen. Es gibt zwei Zugangsweisen:

- Die zweite, vierte, sechste usw. Zahl ergibt sich durch die Addition von 3 zur vorausgehenden Zahl. Die dritte, fünfte, siebte usw. Zahl ergibt sich aus dem Subtraktion von 1 zur vorausgehenden Zahl. Es entsteht ein Operationsmuster von +3 -1 +3 -1 usw. oder
- Man kann die Zahlenfolge auch als zwei ineinander verschränkte Zahlenfolgen auffassen. Eine Zahlenfolge ergibt sich durch Addition von 2 zur ersten, dritten, fünften, siebten usw. Zahl, die andere Zahlenfolge ergibt sich ebenfalls durch Addition von 2 zur zweiten, vierten, sechsten usw. Zahl.

3, 5, 7, 9,

6, 8, 10, ?

Anregung für den Unterricht

Eine Strategie, das Bildungsgesetz der Zahlenfolgen zu erfassen, ist das systematische Probieren. Die Lernenden untersuchen, in welcher Beziehung die Zahlen in der Folge zueinander stehen.

- Werden die Zahlen in der Folge größer oder kleiner? Muss ich deshalb addieren, subtrahieren, multiplizieren oder dividieren?
- Wie viel muss ich addieren oder subtrahieren?

Zunächst wird man dieses Vorgehen an einfachen Zahlenfolgen mit einem wiederkehrenden Operator trainieren, später auch mit komplizierten Operationsmustern.

Bei Zahlenfolgen wie in der Testaufgabe kann den Kindern der Zugang zum Verständnis erleichtert werden, indem die Zahlenfolge umstrukturiert wird.

Beispiel:

20 26 21 27 22 28 23 ?

Die Zahlenfolge wird mit Zahlenkärtchen präsentiert.

20	26	21	27	22	28	23	?

Die Zahlenkärtchen werden umgelegt, so dass zwei - bisher ineinander verschränkte - Zahlenfolgen deutlicher sichtbar werden.

20		21		22		23	
	26		27		28		?

Die gesuchte Zahl ist nun leichter zu bestimmen und auch das Bildungsgesetz der zwei entstandenen Zahlenfolgen.

Anschließend werden die Zahlenkärtchen wieder in ihre Ausgangslage zurückgeschoben und das Bildungsgesetz der gesamten Zahlenfolge untersucht und bestimmt.

Zu Zahlenfolgen gibt es eine Fülle von Variationsmöglichkeiten, z. B.

- Mit unterschiedlichen Anfangszahlen (7, 15, 80, 200 usw.) beginnen
- Die Operationszahlen verändern (z. B. + 6, - 3 im Wechsel; oder + 4 - 2 im Wechsel, oder + 100, - 1 im Wechsel)
- Den Operator verändern (z. B. · 2 + 2 im Wechsel oder, · 100, : 10)
- Eine Dreiersequenz als Bildungsgesetz (z. B. + 3, + 4, - 5; oder + 1, · 2, - 2)

Die Lernenden können auch angeregt werden, selbst Zahlenfolgen zu erfinden und erhalten so einen vertieften Einblick in deren Konstruktion. Diese Zahlenfolgen können anderen präsentiert werden, die dann das Bildungsgesetz herausfinden und verbalisieren. Im Mittelpunkt stehen die allgemeinen mathematischen Kompetenzen „Darstellen“, „Argumentieren“ und „Kommunizieren“.

Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: II-03/2011

Teilaufgabe a)

Wie heißt die Zahl?

H	Z	E
2	0	8

Die Zahl heißt: _________

Auswertung

RICHTIG	208 ODER zweihundertacht

Teilaufgabe b)

Wie heißt die Zahl?

H	Z	E
	3	6

Die Zahl heißt: _________

RICHTIG	36 ODER sechsunddreißig

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Muster und Strukturen; Zahlen und Operationen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen - strukturierte Zahldarstellungen (z. B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen verstehen - Zahlen bis 1.000.000 auf verschiedene Weise darstellen und zueinander in Beziehung setzen
Allgemeine mathematische Kompetenz	Darstellen - eine Darstellung in eine andere übertragen

Aufgabenbezogener Kommentar

Die Darstellung in der Stellenwerttafel, muss in eine Zahl übersetzt werden.
Um dies bewältigen und verstehen zu können, sind folgende Kenntnisse Voraussetzung:

- Basiswissen über das dezimale Stellenwertsystem (Zahlenwert und Stellenwert der Ziffer)
- Kennen der Begriffe Hunderter, Zehner, Einer (und deren Abkürzungen)
- Kenntnis, dass nicht besetzte Stellen der Stellentafel in der Ziffernschreibweise durch Nullen kenntlich gemacht werden

Anregung für den Unterricht

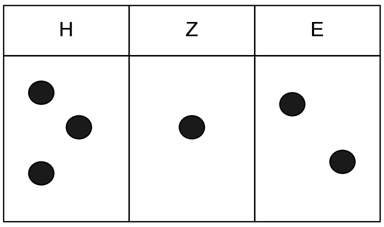
Variiert werden kann diese Aufgabe wie folgt:

- Vorgegebene Zahlen werden durch Legen von Plättchen in die Stellenwerttafel dargestellt. Durch Hinzunehmen, Wegnehmen oder Verschieben von Plättchen lassen sich neue Zahlen generieren.

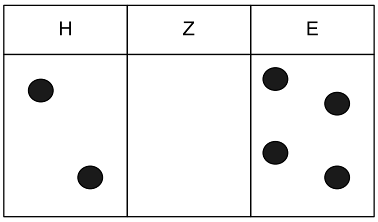
  Mögliche Aufgabenstellung:

  Welche Zahlen können entstehen, wenn man ein Plättchen umlegt (dazulegt oder wegnimmt)?

312 =



- In der Stellenwerttafel werden fehlende Positionen nicht mit einer Null gekennzeichnet. Bei der Übertragung in eine andere Zahldarstellung muss dieser Schritt von den Lernenden vollzogen werden.

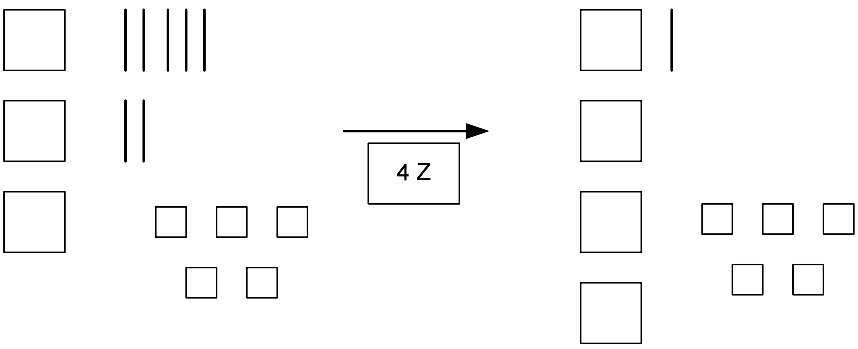


= 204

- Die Stellenwerte werden ohne Stellenwerttafel präsentiert, die Zahlen müssen zugeordnet werden.

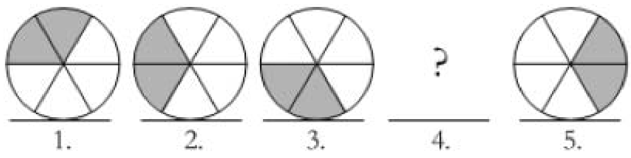
3 H	4 E	=	304
4 Z	5 H	=	540

- Die Lernenden legen Zahlen mit didaktischem Material. Nach Anweisung (Aufgabenkarte) wird didaktisches Material hinzugefügt oder weggenommen, wobei das bereits gelegte Material geändert und die „neue Zahl" benannt werden muss.

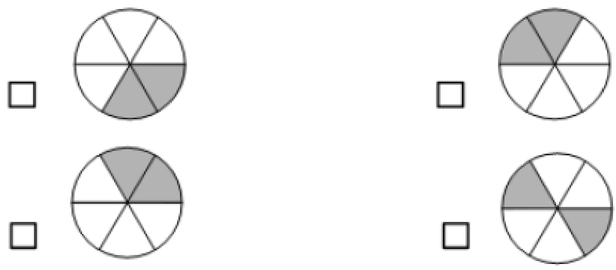


375 neue Zahl: 415

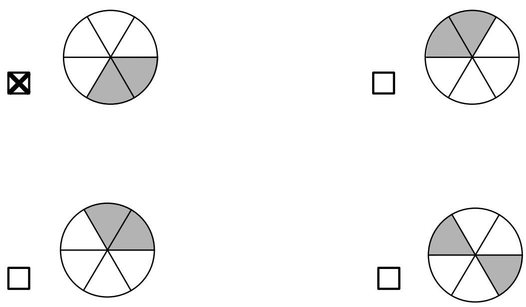
Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: II-04/2011



Welche der folgenden Abbildungen gehört an die 4. Stelle? Kreuze an.



Auswertung

RICHTIG	Nur das 1. Kästchen wurde angekreuzt. 

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Muster und Strukturen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen - Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen
Allgemeine mathematische Kompetenz	Problemlösen - Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen

Aufgabenbezogener Kommentar

Die Lage/Anordnung der dunkel markierten Kreissegmente verändert sich nach einer bestimmten Regel. In dieser Aufgabe drehen sich die dunkel markierten Segmente jeweils um ein Segment entgegengesetzt zur Uhrzeigerrichtung. Die Kinder sollen diese Regel erfassen und aus vorgegebenen Möglichkeiten entscheiden, welcher Kreis an der 4. Stelle zur sinnvollen Fortsetzung der Musterfolge eingesetzt werden muss.

Über das Ausschlussprinzip könnten die Kinder die beiden rechts angegeben Varianten als Lösung der Aufgabe ausschließen.

Begründung:

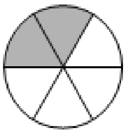
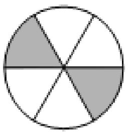
☐ 

Abbildung entspricht dem 1. Kreis der Folge

☐ 

dunkel markierte Segmente liegen nicht nebeneinander
und passen somit nicht zum geometrischen Muster

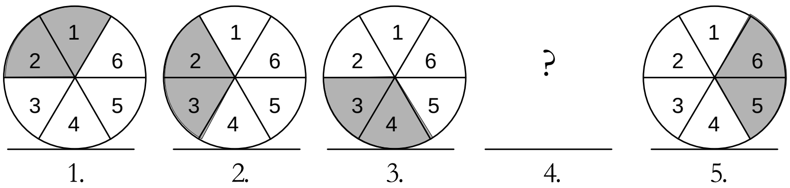
Anregung für den Unterricht

Möglichkeit zur Veranschaulichung der Lösung der Aufgabe

Der 1. Kreis der Musterfolge kann von den Schülerinnen und Schülern aufgezeichnet und ausgeschnitten werden. Anschließend wird die Veränderung/Drehung des Kreises handelnd nachvollzogen, wobei sich die Zahlen nicht mitdrehen. So erkennen die Kinder die Drehung/Veränderung der Anordnung der farbig markierten Segmente um einen Teilabschnitt in entgegengesetzter Richtung zum Uhrzeigersinn und finden so die richtige Lösung.

Oder:

Kreissegmente können nummeriert und anschließend notiert werden.



Stellung der farbig markierten Kreissegmente

1 und 2 2 und 3 3 und 4 5 und 6

Die Arbeit mit geometrischen Mustern umfasst verschiedene Tätigkeiten, die bereits ab Klassenstufe 1 mit unterschiedlichen Anforderungen bearbeitet werden können:

- Muster ausmalen,
- Muster nachzeichnen,
- Muster erkennen,
- Muster beschreiben,
- Muster untersuchen,
- Muster fortsetzen oder ergänzen,
- Muster systematisch verändern und
- Muster selbst entwickeln.

Als Ausgangspunkt bei der Arbeit mit geometrischen Mustern auf handelnder Ebene können geometrische Formen (Plättchen, Legematerial …) genutzt werden. Bei der zeichnerischen Darstellung kann Karopapier das Entwickeln, Fortsetzen und Beschreiben von Mustern unterstützen.

Frage- und Aufgabenstellungen zu Gesetzmäßigkeiten in geometrischen Mustern:

Beschreibe das Muster.	Wie wurde das Muster gebildet? Wie verändert sich das Muster?
Setze das Muster fort.	Wie geht das Muster weiter? Welche Form steht an der … Stelle?
Verändere das Muster.	

Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: II-05/2011

Hier siehst du eine Zahlenfolge.

111 100 88 ______ 61

Teilaufgabe a)

Ergänze die fehlende Zahl.

Auswertung

RICHTIG	75

Teilaufgabe b)

Schreibe die Rechenregel auf.

✍ ______________________________

RICHTIG	• minus 11, minus 12, minus 13, minus 14 • - 11, - 12, - 13, - 14 • - 11, - 12 usw. • es beginnt mit - 11 und dann wird die Minuszahl immer um 1 größer • weniger 11, weniger 12, weniger 13, weniger 14 oder ähnliche Erklärungen, die das Erfassen der Regel erkennen lassen, indem sinngemäß eine der folgenden Feststellungen gemacht wird: 1. Die Zahlen (in der Folge) werden immer kleiner und der Abstand zwischen zwei Nachbarzahlen wird dabei immer größer. ODER 2. Die Zahl, die abgezogen wird, wird immer um eins größer.

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Muster und Strukturen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen - strukturierte Zahldarstellungen (z. B. Hunderter Tafel) verstehen und nutzen
Allgemeine mathematische Kompetenz	Problemlösen - mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden - Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen

Aufgabenbezogener Kommentar

Bei dieser Aufgabe ist – wie auch bei den Aufgaben MS-02/2011 und MS-08/2011 - das Bildungsgesetz der Zahlenfolge zu erkennen. Dazu sind die Zahlen operativ zueinander in Beziehung zu setzen. Es ist zu erfassen, dass die Zahlen in der Folge immer kleiner werden, also von Zahl zu Zahl subtrahiert wird und dass der Subtrahend stetig um 1 größer wird. Diese Gesetzmäßigkeit wird angewendet, um die fehlende Zahl in der Zahlenfolge zu berechnen.

$$\boxed{111} \xrightarrow{-11} \boxed{100} \xrightarrow{-12} \boxed{88} \xrightarrow{-13} \underline{75} \xrightarrow{-14} \boxed{61}$$

In Aufgabe 5b muss das Bildungsgesetz der Zahlenfolge beschrieben werden können. Hier sind die allgemeinen mathematischen Kompetenzen „Kommunizieren“ und „Argumentieren“ angesprochen und gefordert.

Anregung für den Unterricht

siehe Kommentare zu MS-02/2011 und MS-08/2011

Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: II-06/2011

Wie geht es weiter? Ergänze.

12 + 17 = 29

15 + 19 = 34

18 + 21 = 39

21 + 23 = 44

_____ + _____ = _____

Auswertung

RICHTIG	24 + 25 = 49

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Muster und Strukturen; Zahlen und Operationen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen - Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen Rechenoperationen verstehen und beherrschen - die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen
Allgemeine mathematische Kompetenz	Problemlösen - Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen

Aufgabenbezogener Kommentar

Dieses Aufgabenformat gehört zu den operativen Päckchen, auch „Entdeckerpäckchen“ oder „schöne Päckchen“ genannt. Zwischen den einzelnen Aufgaben bestehen mathematische Zusammenhänge. Dabei verändern sich die Summanden in konstanter Weise mit Auswirkungen auf die Ergebnisse. Hier im Beispiel vergrößert sich der 1. Summand immer um 3 und der 2. Summand immer um 2. Das hat zur Folge, dass sich die Ergebnisse jeweils um 5 vergrößern.

Die Veränderungen der Ergebnisse sowie der Zusammenhang mit den einzelnen Aufgaben sollen erkannt und die strukturierte Aufgabenfolge fortgesetzt werden.

Anregung für den Unterricht

Ergebnisse solcher Aufgabenserien können dann angegeben werden, ohne jede einzelne Aufgabe zu lösen.

Um mathematische Entdeckungen zu fördern sind Aufgaben geeignet, bei denen kein zu hoher Anspruch an die Rechenfertigkeit gestellt wird. Aufgaben der Addition und Subtraktion im Zahlenbereich bis 100 sind empfehlenswert.

Das Übungsformat kann genutzt werden, um allgemeine mathematische Kompetenzen zu fördern.

Beispiele:

Löse die Aufgaben. Was fällt dir auf? (Was stellst du fest?) (Kommunizieren/Argumentieren)

3 + 8 =	6 + 7 =	18 + 5 =	10 + 8 =
3 + 10 =	8 + 5 =	28 + 5 =	11 + 9 =
3 + 12 =	10 + 3 =	38 + 5 =	12 + 10 =
3 + 14 =	12 + 1 =	48 + 5 =	13 + 11 =

Vergleiche die Ergebnisse. Was fällt dir auf? Warum ist das so? (Argumentieren)

Setze fort. (Problemlösen)

3 + 8 =	6 + 10 =	18 + 5 =	10 + 8 =
3 + 10 =	8 + 8 =	28 + 5 =	11 + 9 =
3 + 12 =	10 + 6 =	38 + 5 =	12 + 10 =
3 + 14 =	12 + 4 =	48 + 5 =	13 + 11 =
3 + __ =	__ + __ =	__ + __ =	__ + __ =
3 + __ =	__ + __ =	__ + __ =	__ + __ =

Welche Aufgabe passt nicht zum Muster? (Problemlösen)

Begründe. (Argumentieren)

53 + 3 =	33 + 12 =	89 − 9 =	16 + 85 =
53 + 5 =	32 + 13 =	79 − 19 =	17 + 83 =
53 + 7 =	31 + 13 =	96 − 29 =	18 + 82 =
53 + 9 =	30 + 15 =	59 − 39 =	19 + 81 =
53 + 10 =	29 + 16 =	49 − 49 =	20 + 80 =

Wie muss die Aufgabe heißen, die zum Muster passt? (Problemlösen)

Begründe. (Argumentieren)

Welche Ergebnisse sind falsch. Du musst nicht jede Aufgabe nachrechen.

Woran hast du das erkannt? (Kommunizieren / Argumentieren)

31 + 11 = 42	27 + 35 = 62	42 + 21 = 63	15 + 11 = 26
32 + 11 = 43	26 + 34 = 60	42 + 24 = 66	25 + 12 = 37
33 + 11 = 44	25 + 33 = 57	42 + 27 = 69	35 + 13 = 48
34 + 11 = 45	24 + 32 = 56	42 + 30 = 72	45 + 14 = 59
35 + 11 = 46	23 + 31 = 54	42 + 33 = 73	55 + 15 = 60
36 + 11 = 48	22 + 30 = 52	42 + 36 = 78	65 + 16 = 71

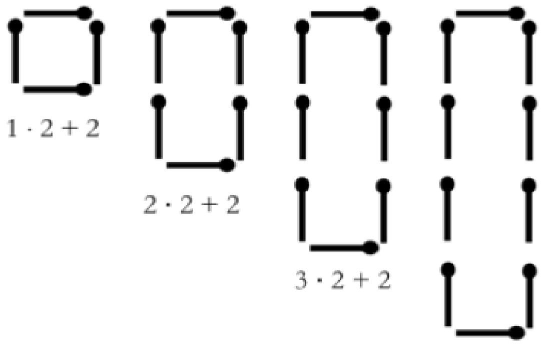
Bilde eigene Päckchen mit einem Muster. (Problemlösen)

Die mathematischen Entdeckungen können farbig, durch Pfeile oder durch Plättchen veranschaulicht werden.

Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: II-07/2011

Hier siehst du eine Folge von Figuren.

Platz zum Zeichnen



Teilaufgabe a)

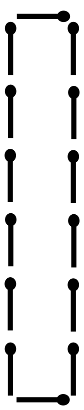
Schreibe die Rechnung zur 4. Figur auf.

Auswertung

RICHTIG	$4 \cdot 2 + 2$

Teilaufgabe b)

Zeichne die 6. Figur der Musterfolge auf.

RICHTIG	Figur wurde korrekt eingezeichnet (vgl. Lösungsbeispiel). Skizzenhafte Darstellung ist auch als richtig zu werten, wenn das Muster zu erkennen ist. 

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Muster und Strukturen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen - Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen
Allgemeine mathematische Kompetenz	Problemlösen - Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen Modellieren - zu Termen, Gleichungen und bildlichen Darstellungen Sachaufgaben formulieren Darstellen - eine Darstellung in eine andere übertragen

Aufgabenbezogener Kommentar

Die Aufgabe zeigt eine Folge in geometrischer und arithmetischer Darstellung. Diese sollten zugeordnet werden.

Die Anforderung besteht in Aufgabe 7a darin, für die aufgezeichnete 4. geometrische Figur einen Term zu erstellen.

Bei der Bearbeitung können unterschiedliche Strategien angewandt werden:

- Das Kind erkennt die arithmetische Regel und löst die Aufgabe durch Änderung des ersten Faktors. Bei der Lösung wird keine Verbindung zwischen den beiden Folgen hergestellt.
- Das Kind erkennt die Gesetzmäßigkeit in der Figurenfolge und stellt eine Verknüpfung zur Folge der Rechenausdrücke her.

In Aufgabe 7b erhöht sich der Schwierigkeitsgrad. Die Figurenfolge soll zeichnerisch fortgesetzt werden, wobei jedoch nicht die unmittelbar folgende Figur gefragt ist. So muss nicht nur die zu zeichnende Figur, sondern auch die 5. Figur, die weder als Figur noch als Rechnung dargestellt ist, in der Vorstellung ergänzt werden.

Dabei gibt es ebenfalls unterschiedliche Vorgehensweisen:

- Die Konstruktion erfolgt in der Vorstellung und es wird nur die 6. Figur aufgezeichnet.
- Es wird als Lösungshilfe nicht nur die 6. sondern auch die 5. Figur aufgezeichnet.
- Eine Verbindung zwischen beiden Folgen kann aber muss nicht hergestellt werden.

Anregung für den Unterricht

Das Nachlegen der Figuren mit Material kann die Lösungsfindung unterstützen.

Variiert werden kann diese Aufgabe, indem

- ein Term zu ergänzen ist, der sich nicht aus dem unmittelbar vorhergehenden erschließt. Dabei kann die Anzahl der fehlenden und damit in der Vorstellung zu reproduzierenden Teile erhöht werden.
- mehrere Figuren vorgegeben sind und die Figuren unter Beachtung einer Regel geordnet werden müssen.
- eine unvollständige Figurenfolge und mehrere Lösungsmöglichkeiten vorgeben werden. Der Lernende entscheidet sich für eine Lösung und begründet seine Wahl.

Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: II-08/2011

Ergänze die Zahlenfolgen.

Auswertung

Teilaufgabe a)

6, 9, ________, 15, 18

RICHTIG	12

Teilaufgabe b)

95, 75, 55, ________, 15

RICHTIG	35

Teilaufgabe c)

13, 26, 52, ________, 208

RICHTIG	104

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Muster und Strukturen; Zahlen und Operationen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen - Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen Rechenoperationen verstehen und beherrschen - die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen
Allgemeine mathematische Kompetenz	Problemlösen - mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden

Aufgabenbezogener Kommentar

Bei Aufgabe 8 sind einfache Gesetzmäßigkeiten in einer Zahlenfolge zu erkennen, indem die Zahlen operativ zueinander in Beziehung gesetzt werden:

8a: Regel + 3, bzw. Ausschnitt aus der Dreier-Einmaleinsreihe

8b: Regel - 20

8c: Regel : verdoppeln

Anregung für den Unterricht

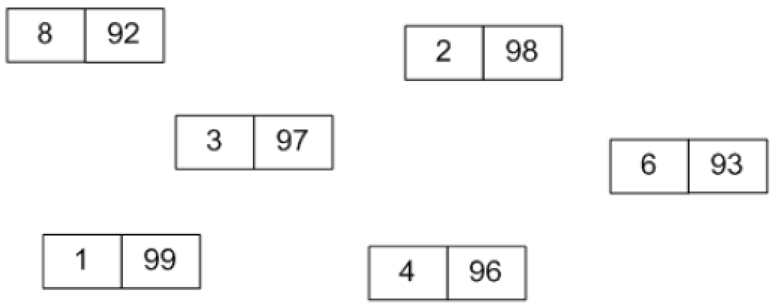
Variiert werden kann diese Aufgabe wie folgt:

- verbalisieren der Gesetzmäßigkeit durch Anwenden der mathematischen Begriffe wie „verdoppeln“, „addieren“, „subtrahieren“, „multiplizieren“ → schulen der Argumentationsfähigkeit.
- selbstständiges entwickeln von Regeln und Zahlenfolgen
- lösen „traditioneller“ Zahlenfolgen (vgl. Fibonacci-Folge) und entdecken der Gesetzmäßigkeiten

Eine Erhöhung des Schwierigkeitsgrades bezüglich der Rechenfertigkeit bietet sich nicht an, da der Schwerpunkt dabei im Rechnen – also im Bereich von Zahlen und Operationen – liegen würde.

Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: II-09/2011

Warum passt das Zahlenpaar | 6 | 93 | nicht zu den anderen? Begründe.



Auswertung

RICHTIG	Alle Antworten, aus denen hervorgeht, dass eine systematische mathematische Verschiedenheit des fraglichen von den anderen Zahlenpaaren erkannt wurde, z. B. • Wenn ich die beiden Zahlen addiere, bekomme ich 100. • 1 + 99 = 2 + 98 = ... = 100 • 6 + 93 = 99 ODER - Das Zahlenpaar passt nicht zusammen, weil 6 und 3 gleich 9 sind und alle anderen sind 10 • Sie passt nicht, weil es muss den Zehner auffüllen. ODER andere richtige Lösungen, z. B. • Weil es eine ungerade Zahl und eine gerade Zahl ist und die anderen entweder zwei gerade Zahlen haben oder zwei ungerade.

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Muster und Strukturen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen - strukturierte Zahldarstellungen (z. B. Hunderter Tafel) verstehen und nutzen
Allgemeine mathematische Kompetenz	Problemlösen - Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen

Aufgabenbezogener Kommentar

Das Erkennen eines arithmetischen Musters in der funktionalen Beziehung der Zahlenpaare ist Voraussetzung zur Lösung der Aufgabe, d.h. das Gemeinsame der Zahlenpaare muss zunächst erkannt, verallgemeinernd verbalisiert werden und an allen Beispielpaaren überprüft werden. Eine nachvollziehbare, mathematisch argumentative Formulierung der Begründung, warum das angegebene Zahlenpaar nicht zu den anderen passt, bildet die Schwierigkeit dieser Aufgabe. Die prozessbezogene Kompetenz „Argumentieren“ wird damit überprüft.

Anregung für den Unterricht

Das Verbalisieren mathematischer Sachverhalte bereitet vielen Lernenden Probleme. Es setzt Kommunikations- und Argumentationskompetenz, sowie das Kennen mathematischer Fachbegriffe voraus. Dies erwerben Lernende am ehesten, wenn sie sich bei der Bewältigung von problemhaltigen Lernaufgaben so früh wie möglich mit einem Partner über Mathematik austauschen. Später gehen sie dazu über, gemeinsam die Lösungswege zu notieren und zwar so, dass sie von den Mitschülerinnen und Mitschülern nachvollziehbar sind.

Die in Partnerschaft durchgeführte Auseinandersetzung mit arithmetischen Mustern kann durch den kommunikativen Austausch von „Entdeckungen“ den Einblick in Zahlbeziehungen, Zusammenhängen und Gesetzmäßigkeiten fördern, so dass die Entwicklung flexibler Rechenkompetenz angeregt wird. Insbesondere angefügte Arbeitsaufträge oder Fragestellungen helfen den Lernenden sich mündlich oder auch schriftlich auszutauschen. Dadurch können alle prozessbezogenen Kompetenzen angesprochen werden.

- Was fällt euch auf?
- Habt ihr eine Vermutung, warum das so ist?
- Beschreibt eure Vermutung so, dass eure Mitschülerinnen und Mitschüler die Erklärung nachvollziehen können.
- Findet eine geeignete Darstellungsform - Tabelle, Diagramm, Gleichung, Skizze - für eure Erklärung.
- Welche Regel könnte man hier finden?
- Ist das immer so? Könnt ihr ein Gegenbeispiel finden?
- Was wäre, wenn ich vier aufeinanderfolgende Zahlen addieren würde? (oder z. B. eine Ziffer ausgetauscht, hinzukommt, weggenommen wird)?

Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: II-10/2011

Familie Huber benötigt für ein gesundes Frühstück an einem Tag ungefähr:

50 g Nüsse
2 Äpfel
100 g Müsli
1 l Milch

Ergänze die Tabelle.

	1 Tag	3 Tage	eine Woche
Nüsse	50 g	g	g
Äpfel		6	
Müsli	g	g	700 g
Milch	1 l	l	l

Auswertung

RICHTIG	150 g, 350 g

RICHTIG	2, 14

RICHTIG	100 g, 300 g

RICHTIG	3 l, 7 l

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Muster und Strukturen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	funktionale Beziehungen erkennen, beschreiben und darstellen - einfache Sachaufgaben zur Proportionalität lösen
Allgemeine mathematische Kompetenz	Modellieren - Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen

Aufgabenbezogener Kommentar

Gegeben ist eine funktionale Beziehung einer altersrelevanten Sachsituation, die in einer bekannten Tabellenform dargestellt wird. Der Tabelle müssen die relevanten Informationen entnommen werden, die zur Berechnung der fehlenden Werte nötig sind.

Voraussetzung zur Berechnung ist der Umgang mit und das Lesen von Tabellen, sowie das Berechnen einfacher Aufgaben zu den Grundrechenarten.

Anregung für den Unterricht

Die Verwendung tabellarischer Darstellungsformen als ein Aspekt der prozessbezogenen Kompetenz „Darstellung von Mathematik“ – sowohl in ihrer Erstellung als auch als Grundlage zum Auslesen von Informationen oder als Anlass zur Kommunikation und Argumentation über mathematische Sachverhalte – ist Grundvoraussetzung zum Lösen problemhaltiger Aufgaben.

Die Konfrontation der Lernenden mit tabellarischen Darstellungen und Diagrammen, die aus allen fünf mathematischen Leitideen stammen können, sollte bereits in der Eingangsphase erfolgen. Sie gehen von Sachsituationen aus,

- die der Lebenswelt der Kinder entnommen sind, deren Daten die Kinder selbst erheben und ggf. in Tabellenform umsetzen,
- sich dabei mathematische Fragen stellen und
- Berechnungen – auch zur Proportionalität – durchführen und dazu Aussagen formulieren.

Beispiel: Kinder wollen einen Nachtisch für alle Kinder der Klasse herstellen: Zwei Rezepte für vier Personen stehen zur Auswahl:

- Obstsalat
- Schokoladenpudding

Zunächst wird eine Umfrage in der Klasse durchgeführt, Strichlisten und Säulendiagramme werden erstellt, bevor die Einkaufslisten erarbeitet werden:

- Welche Mengen müssen wir von den einzelnen Obstsorten einkaufen?
- Was kostet das dann?
- Welche Zutaten in welchen Mengen benötigen wir für den Schokoladenpudding?
- Wie teuer wird das?
- Was müssen wir pro Portion von jedem Nachtisch berechnen (Geld einsammeln)?
- Welcher Nachtisch wird teurer? Wie organisieren wir die Durchführung der Einkäufe und der Bearbeitung der Rezepte?
- Welche Mengen von Zutaten benötige ich, wenn ich die Rezepte für mich und meine Freundin/meinen Freund zuhause nachkochen möchte?
- Wie teuer werden die Nachtische?

Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: II-11/2011

Wie geht es weiter? Setze das Muster fort.

$3 = 1 \cdot 3$

$3 + 5 = 2 \cdot 4$

$3 + 5 + 7 = 3 \cdot 5$

$3 + 5 + 7 + 9 = 4 \cdot 6$

_________________ = ___________

Auswertung

RICHTIG	$3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 5 \cdot 7$

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Muster und Strukturen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen - Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen
Allgemeine mathematische Kompetenz	Problemlösen - Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen

Aufgabenbezogener Kommentar

Der Zusammenhang zwischen dem linken Term und dem rechten Term der Gleichung sowie die Struktur der Aufgaben untereinander ist zu erfassen.

Erkennen der gemeinsamen Struktur:

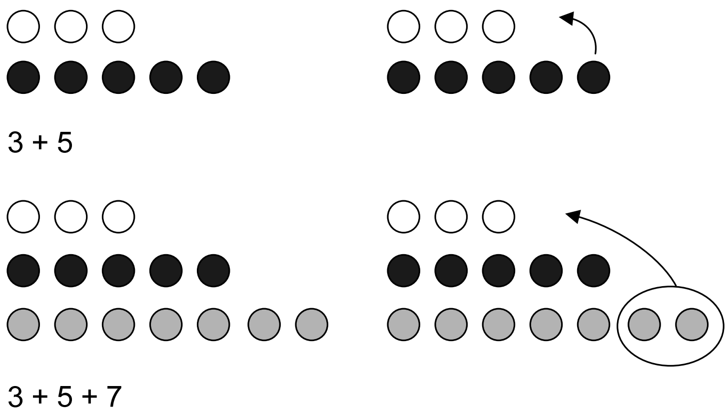
Die Summe auf der linken Seite einer Gleichung entspricht dem Produkt der Faktoren auf der rechten Seite, wobei der 1. Faktor die Anzahl der Summanden angibt.

Die Anzahl der Summanden erhöht sich von Aufgabe zu Aufgabe jeweils um einen, wobei die Summanden die Folge nacheinander folgender ungerader Zahlen darstellt.

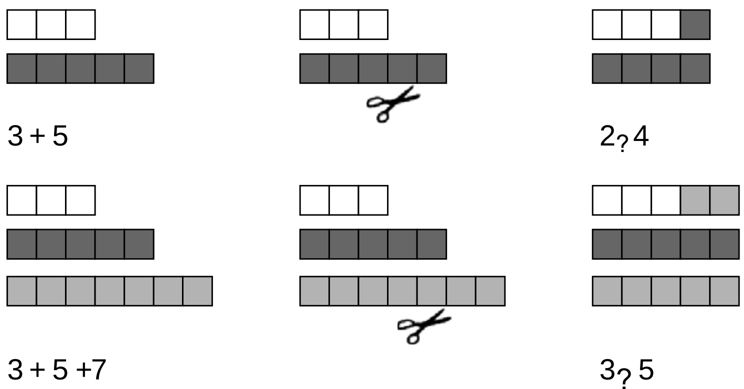
Die untereinander stehenden Faktoren erhöhen sich jeweils um 1.

Anregung für den Unterricht

Das Verständnis für den Zusammenhang zwischen der linken und rechten Seite der Gleichung kann auf handelnder und bildhafter Ebene veranschaulicht werden.



- auf Handlungsebene Material (Kastanien, Murmeln, Wendeplättchen, Steckwürfel o. ä.) umlegen
- bei bildhaften Darstellungen das Einzeichnen von Pfeilen oder Abschneiden und Anlegen des Materials



Testheftteil-Aufgabe Nr./Jahr: II-12/2011

Frau Ufer kauft je eine Nussecke für die 30 Kinder ihrer Schulklasse.
Beim Bäcker kostet eine Nussecke 1,10 €.
Heute gibt es aber ein Angebot.

Wie viel Euro muss Frau Ufer bezahlen?

Antwort: Sie muss _________ € bezahlen.

Auswertung

RICHTIG	22

Bezug zu den Bildungsstandards:

Merkmale

Leitidee	Muster und Strukturen
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenz	funktionale Beziehungen erkennen, beschreiben und darstellen - funktionale Beziehungen in Sachsituationen erkennen, - sprachlich beschreiben (z. B. Menge - Preis) und entsprechende Aufgaben lösen
Allgemeine mathematische Kompetenz	Modellieren - Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen - Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen

Aufgabenbezogener Kommentar

Die recht anspruchsvolle, textlastige Sachaufgabe enthält viele Informationen. Durch eine Zeichnung werden diese ergänzt. Es handelt sich um eine mehrschrittige, problemhaltige Aufgabe. Der Kern der Aussage entspricht einer funktionalen Beziehung, die der Lebenswelt der Lernenden entnommen und für sie nachvollziehbar ist. Sie verlangt von ihnen die Berechnung einer proportionalen Größe. Erschwerend ist, dass zunächst einmal die relevanten Informationen den Texten entnommen werden müssen, um ein mathematisches Konstrukt als Grundlage für den Modellierungsprozess herauszuarbeiten. Dazu müssen die Zusammenhänge erkannt und genutzt werden, damit mithilfe von mathematischen Kenntnissen und Fertigkeiten die Lösung berechnet werden kann.

Anregung für den Unterricht

Die Aufgabe eignet sich als Lernaufgabe, und zwar ohne eine vorgegebene Fragestellung. In Partnerarbeit versuchen die Lernenden Fragestellungen selbst zu finden und deren Beantwortungen zu verbalisieren. Weiterhin könnten Strategien erarbeitet werden, mit deren Hilfe den Texten relevante Informationen entnommen werden können, indem sie unterstreichen, herausschreiben, selbstformulierte Sätze bilden oder auch die Sachsituation nachspielen.
Bezüglich der Aufgabe sind Fragestellungen und entsprechende Lösungsansätze vielfältig und im Schwierigkeitsgrad differenziert. Die schriftliche Bearbeitung eröffnet der Lehrkraft die Möglichkeit, die Denkwege der Lernenden nachzuvollziehen, Fehler als Anlass zur Diagnose wahrzunehmen und gemeinsam mathematische Denkfehler anzusprechen, indem die berechnete Größe auf die Sachsituation bezogen reflektiert wird (Kann das Ergebnis stimmen?). Der schriftliche Lösungsweg in Anlehnung an den Modellierungsprozess dient den Partnern gleichzeitig dazu, ihre Aufgabe mit der Fragestellung, dem ausführlich beschriebenen Lösungsweg und der Antwort den Mitschülerinnen und Mitschülern nachvollziehbar zu präsentieren.